C. R. Acad. Sci. Paris, t. 316, Série I, p. 1307-1312, 1993

Géométrie différentielle/*Differential Geometry*

Quantification de la cohomologie des algèbres de Lie de champs de vecteurs et fibrés en droites sur des surfaces complexes compactes

Artemio GONZÁLEZ-LÓPEZ, Jacques C. HURTUBISE, Niky KAMRAN et Peter J. OLVER

Résumé — On donne une interprétation géométrique du phénomène de « quantification » de la cohomologie des algèbres de Lie de dimension finie de champs de vecteurs en deux variables complexes, admettant un module de dimension finie de fonctions lisses. Cette interprétation est basée sur la construction de fibrés en droites holomorphes sur des surfaces complexes compactes rationnelles.

Quantization of the cohomology of Lie algebras of vector fields and line bundles over compact complex surfaces

Abstract — A geometric interpretation is given for the phenomen of "quantization" of the cohomology of finite-dimensional Lie algebras of vector fields admitting a finite-dimensional module of smooth functions. This interpretation is based on the construction of holomorphic line bundles on rational compact complex surfaces.

Abridged English Version — Our goal is to give geometric interpretation of the phenomenon of "quantization" of the cohomology of Lie algebras of vector fields in $\mathbf{C}^2$ discovered in [6]. Recall that the Lie algebras $\mathcal{G}$ of first-order differential operators $T=f(x, y)(\partial/\partial x)+g(x, y)(\partial/\partial y)+h(x, y)$ on an open set U of $\mathbf{C}^2$ with C^∞ coefficients are classified up to the pseudo-group action given by $\Phi(T)=\psi.\varphi_* T.\psi^{-1}$, where $\varphi:(x, y)\mapsto(X(x, y), Y(x, y))$ is a C^∞ diffeomorphism and $\psi: U\to \mathbf{C}^*$ is C^∞, by the triples $(\mathcal{H}, \mathcal{M}, F)$, where $\mathcal{H}$ is the finite-dimensional Lie algebra generated by the vector fields $f(x, y)(\partial/\partial x)+g(x, y)(\partial/\partial y)$, $\mathcal{M}$ is a finite-dimensional $\mathcal{H}$-module of smooth functions and [F] is a cohomology class in $H^1(\mathcal{H}; C^\infty(U)/\mathcal{M})$. The classification of the triples $(\mathcal{H}, \mathcal{M}, [F])$ has been done in [6] (*see* also [7]). One obtains 24 families, depending on arbitrary constants or functions representing the cohomology classes $[F]\in H^1(\mathcal{H}; C^\infty(U)/\mathcal{M})$. If one makes the additional hypothesis that the Lie algebras $\mathcal{G}$ of first-order differential operators admit a *finite-dimensional* module $\mathcal{N}$ of smooth functions in U, then one shows by direct computation [6] that the cohomology parameters which appear in [F] can only take a discrete set of values, hence the terminology of "quantization of cohomology". Explicitly, one obtains three families of maximal Lie algebras given below in table. The geometric interpretation stems from the following result.

THEOREM. — *A projective complex surface* X *admitting a non-Abelian Lie algebra of holomorphic vector fields which is locally transitive in a Zariski open set is either rational, or the product of* $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ *with an elliptic curve* E.

For the Lie algebras considered, we have $X=\mathbf{P}_1(\mathbf{C})\times\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$, $X=\mathbf{P}_2(\mathbf{C})$ or $X=\Sigma_r$, the r-th Hirzebruch surface. The modules $\mathcal{N}$ given in below table are then modules of sections of holomorphic line bundles on these surfaces. These line bundles are classified by an integer for $\mathbf{P}_2(\mathbf{C})$ and a pair of integers for $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})\times\mathbf{C}_1(\mathbf{C})$ and Σ_r. This gives rise to the quantization of cohomology.

Note présentée par André LICHNEROWICZ.

0764-4442/93/03161307 $ 2.00 © Académie des Sciences

Notre propos dans cette Note est de donner une interprétation géométrique du phénomène de « quantification » de la cohomologie des algèbres de Lie de champs de vecteurs en deux variables complexes mis en évidence dans [6]. Commençons par un bref rappel sur la quantification de la cohomologie. Soit U un ouvert de $\mathbf{C}^2$, muni de coordonnées locales (x, y). Les opérateurs différentiels du premier ordre sur U,

$$\mathrm{T}=f(x, y)\frac{\partial}{\partial x}+g(x, y)\frac{\partial}{\partial y}+h(x, y), \tag{1}$$

à coefficients de classe C^∞ dans U, forment une algèbre de Lie qui sera notée $\mathscr{D}(\mathrm{U})$. Il existe un pseudo-groupe infini **G** qui opère par automorphismes Φ de $\mathscr{D}(\mathrm{U})$ et dont l'action est donnée par

$$\Phi(\mathrm{T})=\psi\,.\,\varphi_*\mathrm{T}\,.\,\psi^{-1}, \tag{2}$$

où $\varphi:(x, y)\mapsto(\mathrm{X}(x, y), \mathrm{Y}(x, y))$ est un difféomorphisme de classe C^∞ de U et ψ est une fonction de classe C^∞ dans U à valeurs dans $\mathbf{C}^*$. On démontre facilement [6] qu'aux classes d'équivalence sous l'action de **G** de sous-algèbres de Lie $\mathscr{G}$ de dimension finie de $\mathscr{D}(\mathrm{U})$ correspondent de manière biunivoque les classes d'équivalence de triples $(\mathscr{H}, \mathscr{M}, [\mathrm{F}])$, où $\mathscr{H}$ est l'algèbre de Lie de dimension finie de champs de vecteurs sur U engendrée par les champs de vecteurs $f(x, y)(\partial/\partial x)+g(x, y)(\partial/\partial y)$, $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{H}$-module de fonctions de classe C^∞ de dimension finie et [F] est une classe de cohomologie de Chevalley dans $\mathrm{H}^1(\mathscr{H}; \mathrm{C}^\infty(\mathrm{U})/\mathscr{M})$. La classification des triples $(\mathscr{H}, \mathscr{M}, [\mathrm{F}])$ a été faite dans [6] (*voir* également [7]) sur la base de la classification due à Lie [8] des algèbres de Lie de champs de vecteurs dans $\mathbf{C}^2$. Les classes d'équivalence se regroupent en 24 familles, dépendant de constantes ou de fonctions arbitraires représentant les classes de cohomologie $[\mathrm{F}]\in\mathrm{H}^1(\mathscr{H}; \mathrm{C}^\infty(\mathrm{U})/\mathscr{M})$. Si l'on fait comme hypothèse supplémentaire que les algèbres de Lie $\mathscr{G}$ d'opérateurs différentiels du premier ordre admettent un module $\mathscr{N}$ de fonctions de classe C^∞ dans U *de dimension finie*, alors on établit par calcul direct [6] que les paramètres de cohomologie qui classifient les algèbres de Lie $\mathscr{G}$ au sein des différentes familles ne peuvent prendre que des valeurs discrètes, d'où le terme « quantification de la cohomologie ». Explicitement, on obtient trois familles d'algèbres de Lie maximales admettant un module $\mathscr{N}$ de dimension finie et dont les paramètres de cohomologie sont non-nuls, à savoir les cas 11, 15 et 24 de [6]. Nous en reprenons brièvement l'expression sous forme de tableau.

Les algèbres de Lie $\mathscr{G}^{11}_{n,m}$, $\mathscr{G}^{15}_{l}$ et $\mathscr{G}^{24,r}_{k}$ correspondent respectivement à des familles de représentations de $sl(2, \mathbf{C})\oplus sl(2, \mathbf{C})$, $sl(3, \mathbf{C})$ et $gl(2, \mathbf{C})\subset\mathbf{C}^{r+1}$. Les modules de dimension finie $\mathscr{N}^{11}_{n,m}$, $\mathscr{N}^{15}_{l}$ et $\mathscr{N}^{24,r}_{k}$ sont engendrés par des polynômes, et n, m, l et k sont des paramètres de cohomologie, ne pouvant prendre qu'un ensemble discret de valeurs.

Nous allons donner une interprétation géométrique de ce phénomène de quantification de la cohomologie basée sur : (i) la construction, pour chaque algèbre de Lie de dimension finie $\mathscr{H}$ de champs de vecteurs, d'une surface complexe compacte X telle que $\mathscr{H}$ opère par automorphismes infinitésimaux de X, et (ii) la construction pour chaque surface X obtenue en (i) d'un fibré en droites holomorphes $p:\mathrm{L}\to\mathrm{X}$ tel que l'action de $\mathscr{H}$ sur X se relève à une action de $\mathscr{H}$ sur l'espace des sections holomorphes $\Gamma_{\mathrm{hol}}(\mathrm{L})$ de L, de telle manière que sa restriction à $\mathscr{N}\subset\Gamma_{\mathrm{hol}}(\mathrm{L})$ définisse une représentation irréductible de $\mathscr{H}$.

Observons tout d'abord que les modèles globaux pour les actions de groupe engendrées par les algèbres de Lie de champs de vecteurs localement transitives forment une classe de surfaces assez restreinte.

TABLEAU

Cas	Générateurs	Module
$\mathscr{G}^{11}_{n,m}$	$\frac{\partial}{\partial x}, x\frac{\partial}{\partial x}-\frac{n}{2}, x^2\frac{\partial}{\partial x}-nx$ $\frac{\partial}{\partial y}, y\frac{\partial}{\partial y}-\frac{m}{2}, y^2\frac{\partial}{\partial y}-my,$ $m, n\in\mathbf{Z}^+.$	$\mathscr{N}^{11}_{n,m}=\{x^i y^j,\ 0\leqq i\leqq n,\ 0\leqq j\leqq m\}$
$\mathscr{G}^{15}_{l}$	$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial x}-\frac{l}{3}, y\frac{\partial}{\partial x}, x\frac{\partial}{\partial y}$ $y\frac{\partial}{\partial y}-\frac{l}{3}, x^3\frac{\partial}{\partial x}+xy\frac{\partial}{\partial y}-lx,$ $xy\frac{\partial}{\partial x}+y^2\frac{\partial}{\partial y}-ly.$ $l\in\mathbf{Z}^+$	$\mathscr{N}^{15}_{l}=\{x^i y^i,\ 0\leqq i+j\leqq l\}.$
$\mathscr{G}^{24,r}_{k}$	$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial x}-\frac{k}{2}, x\frac{\partial}{\partial y}, y\frac{\partial}{\partial y},$ $x^2\frac{\partial}{\partial x}+rxy\frac{\partial}{\partial y}-kx, x^2\frac{\partial}{\partial y}, \ldots, x^r\frac{\partial}{\partial y},$ $r\in\mathbf{Z}^+$ et $\geqq 1, k, l, \in\mathbf{Z}^+.$	$\mathscr{N}^{24,r}_{k,l}=\{x^i y^j,\ 0\leqq i+rj\leqq k,\ 0\leqq j\leqq l\}$

THÉORÈME. — *Soit* X *une surface complexe projective. Si* X *admet une algèbre de Lie non-abélienne* $\mathscr{H}$ *de champs de vecteurs holomorphes qui est localement transitive sur un ouvert de Zariski, alors* X *est rationnelle, ou le produit de* $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ *avec une courbe elliptique* E.

Remarque. — Si on considère de façon plus générale le surfaces compactes, il y a d'autres surfaces admettant de telles actions, par exemple des surfaces de Hopf. Des surfaces non algébriques sont cependant d'un moindre intérêt du point de vue des représentations sur les espaces de sections, car pour que la représentation ne soit pas le pull-back d'une représentation définie sur une courbe, la surface doit être projective.

Preuve. — Étant donnée une variété complexe Y, nous désignerons dans ce qui suit par TY, K_Y, $\mathcal{O}_Y$, $\mathcal{O}^*_Y$ et $\mathbf{Z}_Y$ respectivement, le fibré tangent holomorphe de Y, le fibré canonique de Y, le faisceau structural de Y, le faisceau des germes de fonctions holomorphes non nulles sur Y et le faisceau des fonctions localement constantes à valeurs dans $\mathbf{Z}$ sur Y. Rappelons que le groupe des fibrés en droites holomorphes L sur Y est isomorphe à $\mathrm{Pic}(Y)\simeq H^1(Y;\ \mathcal{O}^*_Y)$ et qu'un tel fibré est déterminé topologiquement par sa première classe de Chern $c_1(L)\in H^2(Y;\ \mathbf{Z}_Y)$. Si $\mathscr{H}$ est localement transitive, alors elle admet deux générateurs linéairement indépendants dans l'espace tangent en un point $x\in X$. Nous obtenons donc un homomorphisme $\mathcal{O}_X\oplus\mathcal{O}_X\to TX$ et par dualité un homomorphisme non nul $K_X\to\mathcal{O}_X$. Par conséquent, il vient $K_X\leqq 0$. Par ailleurs, nous pouvons toujours supposer que X est minimale, c'est-à-dire qu'elle ne contient pas de courbe rationnelle de type (-1). En effet, on vérifie facilement par un calcul en coordonnées locales que les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un champ de vecteurs soit holomorphe dans un voisinage de la courbe (-1) dans l'éclatement $\hat{X}$ de X en un point sont équivalentes à ce que ce champ de vecteurs soit bien relevé de X.

En vertu des remarques faites ci-dessus, nous voyons que les seules possibilités qui subsistent pour X dans la classification d'Enriques-Kodaira [3] des surfaces complexes projectives sont les surfaces rationnelles, les surfaces réglées ayant pour base une surface Riemann S de genre $g(S) \geqq 1$, les surfaces K 3 et les tores.

Commençons par le cas des surfaces réglées $\pi : X \to S$, où $g(S) \geqq 1$. Toute famille à un paramètre d'automorphismes de X doit préserver le système de fibres de π. Comme ces fibres ont un fibré normal trivial, toutes les courbes de ce système sont des fibres. Par conséquent, les automorphismes de X sont des relèvements d'automorphismes de S. Comme le groupe des automorphismes d'une surface de Riemann S ne peut être continu que si $g(S)=0$ ou 1, il s'ensuit que X est une surface réglée sur une courbe elliptique. Ces surfaces ont été étudiées par Atiyah [2]. Rappelons tout d'abord que X doit être isomorphe à $\mathbf{P}(V)$, où V est un fibré vectoriel holomorphe de rang 2 sur S. Le problème se ramène donc à classifier les fibrés vectoriels V, au produit tensoriel près avec un fibré en droites. On peut donc supposer que le degré de V est nul. Il existe des fibrés en droites L et L′ où L est de degré maximal et est unique si ce degré est positif, tels que l'on ait la suite exacte

(4) $$0 \to L \to V \to L' \to 0,$$

Les automorphismes de S agissent sur Pic $(S) \simeq H^1(S; \mathcal{O}_S^*)$ par translation d'un diviseur représentant L; par exemple, l'action n'est triviale que sur $\mathrm{Pic}^0(S)$, par le théorème d'Abel [3]. Puisque l'action de l'algèbre doit préserver $\mathbf{P}(V)$, on obtient

(5) $$c_1(L) = c_1(L') = 0.$$

En normalisant, on peut toujours choisir V de la forme

(6) $$0 \to \mathcal{O}_S \to V \to L' \to 0,$$

où $c_1(L')=0$. Les extensions de L′ étant déterminées par les éléments de

$$H^1(S; L') = \left| \begin{array}{ll} 0 & \text{si } \ L' \neq \mathcal{O}_S \\ \mathbf{C} & \text{si } \ L = \mathcal{O}_S \end{array} \right.$$

on a, soit

(7) $$X = \mathbf{P}(\mathcal{O}_S \oplus L'), \qquad c_1(L') = 0,$$

soit

(8) $$X = \mathbf{P}(V)$$

où V est une extension non triviale de $\mathcal{O}_S$ par $\mathcal{O}_S$. Nous allons démontrer que l'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux de X est abélienne. En effet, nous avons $S = \mathbf{C}^*/\mathbf{Z}$, où l'action de $\mathbf{Z}$ est engendrée par $z \mapsto az$. Considérons d'abord le cas (7), où $L' \neq \mathcal{O}_S$. Nous avons donc $L' \simeq \mathbf{C} \times_{\mathbf{Z}} \mathbf{C}^*$ où l'action de $\mathbf{Z}$ est engendrée par $(w, z) \mapsto (\alpha w, az)$, pour un certain $\alpha \in \mathbf{C}^*$. Par conséquent, on obtient une action de $\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^*$ sur $\mathcal{O}_S \oplus L' \simeq \mathbf{C} \times (\mathbf{C} \times_{\mathbf{Z}} \mathbf{C}^*)$, par $(u, w, z) \mapsto (\lambda u, w, \mu z)$. Tous les automorphismes de X sont nécessairement de cette forme. En effet, on remarque tout d'abord qu'il suffit de considérer les automorphismes opérant trivialement sur S puisque le deuxième facteur $\mathbf{C}^*$ opère transitivement sur S. Un tel automorphisme donne donc des applications $L' \to \mathcal{O}_S \oplus L'$, $\mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_S \oplus L'$ qui seront surjectives sur les deuxième et premier facteurs respectivement si $L' \neq \mathcal{O}_S$. Nous voyons que les sections 0 et ∞ de $X = \mathbf{P}(\mathcal{O}_S \oplus L')$ sont donc fixes. Pour tout fibré en droites $\tilde{L}$ de degré -1, on a des applications $\tilde{L} \to \mathcal{O}_S$ et $\tilde{L} \to L'$ qui sont uniques à un facteur multiplicatif non-nul près, et qui définissent donc des sections de $\pi : X = \mathbf{P}(\mathcal{O}_S \oplus L') \to S$. Les points d'intersection A et B de l'image de cette section avec les sections 0 et ∞ sont fixés par tous les automorphismes en question; un automorphisme fixant un troisième point étant nécessairement l'identité, on retrouve donc l'action de $\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^*$, et l'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux est bien abélienne. Si $L' = \mathcal{O}_S$, alors on a $\mathbf{P}(\mathcal{O}_S \oplus \mathcal{O}_S) \simeq \mathbf{P}_1(\mathbf{C}) \times S$ ce qui correspond à l'exception prévue par l'hypothèse du théorème.

Considérons à présent le cas (8). On a $V = \mathbf{C}^2 \times_{\mathbf{Z}} \mathbf{C}^*$, où l'action de $\mathbf{Z}$ est donnée par $((v, w), z) \mapsto ((v+w, w), az)$ pour un certain a. On obtient donc une action de $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^*$ sur V, de la forme $((v, w), z) \mapsto ((v+\lambda w, w), \mu z)$. On démontre de manière analogue au cas précédent que tous les automorphismes sont nécessairement de cette forme. Il en résulte que l'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux est nécessairement abélienne.

Les cas restant à considérer dans la classification d'Enriques-Kodaira sont facilement éliminés. En effet, les surfaces K 3 ont un groupe d'automorphismes discret [3], et pour les tores, on a un groupe d'automorphismes engendré par des translations. Ceci achève la preuve de la proposition.

De ce qui précède, il découle que les seuls modèles globaux possibles pour les algèbres de Lie de champs de vecteurs $\mathcal{G}_{0,0}^{11}$, $\mathcal{G}_0^{15}$ et $\mathcal{G}_0^{24,r}$ sont des surfaces rationnelles. Explicitement, on obtient $X = \mathbf{P}_1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ pour $\mathcal{G}_{0,0}^{11}$, $X = \mathbf{P}_2(\mathbf{C})$ pour $\mathcal{G}_0^{15}$ et $X = \Sigma_r$ pour $\mathcal{G}_0^{2,r}$, où Σ_r désigne la r-ième surface de Hirzebruch, c'est-à-dire l'espace total du fibré $\mathbf{P}(V_r)$, V_r étant le fibré en droites $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_1(\mathbf{C})} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}_1(\mathbf{C})}(r)$ sur $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$. Les coordonnées (x, y) dans lesquelles on a exprimé les générateurs des algèbres de Lie de champs de vecteurs $\mathcal{G}_{0,0}^{11}$, $\mathcal{G}_0^{15}$, $\mathcal{G}_0^{24,r}$ dans le tableau donné ci-dessus sont des coordonnées affines dans un ouvert ne contenant pas le diviseur à l'infini.

Les algèbres de Lie d'opérateurs différentiels du premier order $\mathcal{G}_{n,m}^{11}$, $\mathcal{G}_l^{15}$ et $\mathcal{G}_k^{24,r}$ opèrent sur les sections de fibrés en droites holomorphes L sur les surfaces rationnelles obtenues ci-dessus. Si X est rationnelle, alors $H^1(X; \mathcal{O}_X) = 0$. Le calcul de $H^2(X; \mathbf{Z}_X)$ est élémentaire pour les surfaces considérées. On obtient $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ pour $X = \mathbf{P}_1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$, $\mathbf{Z}$ pour $X = \mathbf{P}_2(\mathbf{C})$ et $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ pour $X = \Sigma_r$ (*voir* [3] pour le cas des surfaces de Hirzebruch). Les fibrés en droites holomorphes sur $\mathbf{P}_1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$, $\mathbf{P}_2(\mathbf{C})$ et Σ_r sont donc respectivement classifiés par une paire d'entiers (n, m), un entier l et une paire d'entiers (k, r'). Nous les désignerons par $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}_1(\mathbf{C})}(n, m)$, $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2(\mathbf{C})}(l)$ et $\mathcal{O}_{\Sigma_r}(k, l)$. Les modules $\mathcal{N}_{n,m}^{11}$, $\mathcal{N}_l^{15}$ et $\mathcal{N}_{k,l}^{24,r}$, s'identifient alors respectivement à l'image en coordonnées affines des sections des fibrés en droites donnés ci-dessus. Notons que dans le cas de l'algèbre $\mathcal{G}_{n,m}^{11}$ l'action des opérateurs différentiels du tableau donne la forme infinitésimale de la représentation irréductible de $SL(2, \mathbf{C}) \times SL(2, \mathbf{C})$ sur les sections du fibré $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}_1(\mathbf{C})}(n, m)$ correspondant au poids maximal (n, m). L'interprétation géométrique de ce résultat est donnée par la construction de Borel-Weil-Bott [4] des représentations irréductibles de poids maximal λ des groupes de Lie compacts semi-simples G sur les sections de fibrés en droites L_λ holomorphes sur les espaces homogènes complexes $M = G_{\mathbf{C}}/B^+$, B^+ étant le sous-groupe de Borel de $G_{\mathbf{C}}$. Il en va de même pour le cas 15. Par contre, l'algèbre de Lie $\mathcal{G}_k^{24,r}$ n'est ni compacte ni semi-simple et son action n'est pas transitive sur la surface de Hirzebruch Σ_r. On se trouve donc dans un cadre un peu différent de celui de la construction de Borel-Weil-Bott, dont l'étude générale reste à faire.

Note remise le 15 janvier 1993, acceptée après révision le 22 mars 1993.

Références bibliographiques

[1] O. Alvarez, I. M. Singer et P. Windey, Quantum mechanics and the geometry of the Weyl character formula, *Nuclear Physics*, B, 337, 1990, p. 467-486.

[2] M. F. Atiyah, Vector bundles over an elliptic curve, *Proc. Lond. Math. Soc.*, 7, 1957, p. 414-452.

[3] W. Barth, C. Peter et A. Van de Ven, *Compact complex surfaces*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grunzgebiete, 3, Folge-Band 4, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1984.

[4] A. Besse, *Géomètrie riemannienne en dimension* 4, Cedic/Fernand Nathan, Paris, 1981.

[5] R. Bott, Homogeneous vector bundles, *Ann. of Math.*, 66, 1957, p. 203-248.

[6] A. González-López, N. Kamran et P. J. Olver, Quasi-exactly solvable Lie algebras of differential operators in two complex variables, *J. Phys. A.: Math. Gen.*, 24, 1991, p. 3995-4008.

[7] A. González-López, N. Kamran et P. J. Olver, Lie algebras of first-order differential operators in two complex variables, *Amer. J. Math.*, 114, 1992, p. 1163-1185.

[8] A. González-López, N. Kamran et P. J. Olver, Lie algebras of first-order differential operators in two complex variables, *Canadian Math. Soc. Conf. Proc.*, 12, American Mathematical Society, Providence, RI, 1992, p. 51-84.

[9] S. Lie, Theorie der Transformations Gruppen, *Math. Ann.*, 16, 1880, p. 441-528.

A. G.-L. : *Departamento de Fisica Téorica II, Universidad Complutense, Madrid* 28040, *Spain;*

J. C. H. et N. K. : *Department of Mathematics and Statistics, Burnside Hall, McGill University, Montréal, Québec, H*3*A* 2*K*6, *Canada;*

P. J. O. : *Department of Mathematics, University of Maryland, College Park, MD*20742, *USA.*