ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Изопериметрические неравенства появились в теории вероятностей в начале 70-х годов при исследовании глобальных свойств гауссовских случайных процессов. Наряду с проблемой ограниченности и непрерывности, одним из интригующих вопросов, стоявших в то время, был вопрос о характере распределения максимума гауссовского процесса при (желательно) минимальных предположениях о корреляционной функции. В частности, можно ли гарантировать конечность экспоненциальных моментов максимума ограниченного гауссовского процесса? Убывают ли хвосты распределения максимума не медленнее гауссовских? Положительный ответ на последний вопрос был дан в 1970 г. К. Ферником [127] и Х. Ландау и Л. Шеппом [168] (в то же время А. В. Скороход [35] доказал конечность экспоненциального момента). Ландау и Шепп использовали изопериметрическое свойство шаров на сфере (знаменитая теорема П. Леви), что было, по-видимому, одним из первых привнесений геометрических рассуждений такого рода в теорию гауссовских случайных процессов. Следующий исключительно важный шаг в этом направлении был сделан В. Н. Судаковым, Б. С. Цирельсоном (1974 г., [40]) и К. Бореллем (1975 г., [89]), доказавшими на основе теоремы П. Леви экстремальное свойство полупространств в изопериметрической задаче для гауссовской меры. Именно, обозначим через γ_n (стандартную) гауссовскую меру в $\mathbf{R}^n$ с плотностью

$$\frac{d\gamma_n(x)}{dx} = \frac{1}{(2\,\pi)^{n/2}}\,e^{-|x|^2/2}, \qquad x \in \mathbf{R}^n$$

(где $|x|$ обозначает евклидову норму x). Для множества $A \subset \mathbf{R}^n$ определим его открытую h-окрестность

$$A^h = \big\{ x \in \mathbf{R}^n : \exists\, a \in A,\ |a - x| < h \big\}, \qquad h > 0.$$

Изопериметрическое свойство полупространств означает, что в классе всех измеримых множеств A данной меры величина $\gamma_n(A^h)$ принимает наименьшее значение, когда A – полупространство:

$$\gamma_n(A) = \gamma_n(T) \Rightarrow \gamma_n(A^h) \geq \gamma_n(T^h), \quad T - \text{полупространство.} \tag{0.1}$$

Это свойство можно записать и как изопериметрическое неравенство

$$\gamma_n(A^h) \geq \Phi\big(\Phi^{-1}(\gamma_n(A)) + h\big), \quad h > 0, \tag{0.2}$$

где $\Phi(h) = \gamma_1(-\infty, h]$ – функция распределения стандартной нормальной случайной величины, и Φ^{-1} – функция, обратная к Φ (равенство в (0.1) достигается на любом полупространстве). В частности, когда $\gamma_n(A) = 1/2$,

$$\gamma_n(A^h) \geq \Phi(h) \geq 1 - \frac{1}{2}\, e^{-h^2/2}, \quad h > 0. \tag{0.3}$$

Гауссовское изопериметрическое неравенство (0.2) нашло многочисленные применения как в самой теории гауссовских процессов, так и за ее пределами (напр., в математической статистике [46]). Особенно популярным стало вытекающее из (0.3) неравенство для вероятностей отклонений произвольной функции g на $\mathbf{R}^n$ с липшицевой константой $\|g\|_{\mathrm{Lip}} \leq 1$ относительно ее медианы $m(g)$

$$\gamma_n\big\{\, |g - m(g)| \geq h \,\big\} \leq e^{-h^2/2}. \tag{0.4}$$

Допуская вольность речи, можно сказать, что любая липшицева функция – почти константа, или – на языке множеств – что "почти все" (в смысле меры γ_n) точки евклидова пространства расположены в "малой" окрестности гиперповерхности $\{g = const\}$. Следуя традиции, установившейся во многом благодаря работам В. Д. Мильмана, свойство такого рода стали называть феноменом (свойством) концентрации меры ("the concentration of measure phenomenon", [190], [192], [216]).

Безусловная важность и потенциальная эффективность изопериметрических неравенств и неравенств для концентрации меры (в широком смысле) были поняты и оценены не только в рамках вероятностных задач. Конечно, изопериметрические неравенства как таковые, рассматриваемые только с точки зрения проблемы экстремальности тех или иных множеств и, главным образом, в терминах периметра множеств, уже более ста лет составляют важный раздел геометрии, и их связь, например, с задачами математической физики и теории пространств Соболева была известна задолго до 1970 гг. (см. [12], [25], [204]). Однако, с точки зрения концентрации меры, изопериметрические неравенства стали исследоваться большей частью в рамках функционального анализа и теории вероятностей. В 1968 г. Мильман [28] использовал изопериметрическое свойство шаров на сфере для доказательства (и уточнения) важной теоремы асимптотической теории нормированных пространств – теоремы Дворецкого о почти сферических сечениях выпуклых симметричных тел (ранее Мильман применял эту теорему при исследовании спектра равномерно-непрерывных функций, заданных на единичной сфере бесконечномерного банахова пространства, [26], [27], см. также [191]). Подобно гауссовскому случаю, экстремальное свойство шаров в изопериметрической задаче на единичной сфере $S^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$, то есть, свойство

$$\sigma_{n-1}(A) = \sigma_{n-1}(B) \;\Rightarrow\; \sigma_{n-1}(A^h) \geq \sigma_{n-1}(B^h) \quad h > 0, \tag{0.5}$$

(где A – произвольное измеримое подмножество S^{n-1}, B – шар на S^{n-1} и σ_{n-1} – равномерное, т.е., инвариантное относительно вращений распределение на S^{n-1}) влечет неравенства для концентрации ([28], [192])

$$\sigma_{n-1}(A^h) \geq 1 - \sqrt{\frac{\pi}{8}}\, e^{-nh^2/2} \quad \big(\sigma_{n-1}(A) = \tfrac{1}{2}\big), \tag{0.6}$$

$$\sigma_{n-1}\{\,|g-m(g)|\geq h\,\}\leq\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-nh^2/2}\quad(\,\|g\|_{\mathrm{Lip}}\leq 1)\qquad(0.7)$$

(h-окрестность и липшицевость следует понимать в смысле геодезического расстояния). Именно в таком виде, проливающем свет на роль размерности и характер зависимости от параметра h, неравенства (0.6)–(0.7) выражают феномен концентрации на сфере. в то время как экстремальность шаров больше указывает на геометрическое свойство.

Похожие по форме неравенства для концентрации выполняются и на дискретном кубе $\{0,1\}^n$, именно,

$$\mathbf{P}\,(A^h)\geq 1-e^{-2h^2/n}\quad\big(\mathbf{P}\,(A)=\frac{1}{2}\big),\qquad(0.8)$$

$$\mathbf{P}\,\{\,|g-m(g)|\geq h\,\}\leq 2e^{-2h^2/n}\quad(\,\|g\|_{\mathrm{Lip}}\leq 1),\qquad(0.9)$$

где $\mathbf{P}$ – равномерное (бернуллиевское) распределение на $\{0,1\}^n$, но h-окрестность $A^h=\{x:\rho(A,x)\leq h\}$ ($h\geq 1$ целое) и условие липшицевости уже понимаются в смысле расстояния Хамминга

$$\rho(x,y)=card\{i\leq n:x_i\neq y_i\},\quad x,y\in\{0,1\}^n.$$

(0.8)–(0.9) суть следствия теоремы Л. Харпера [147], нашедшего еще в 1966 г. решение соответствующей изопериметрической задачи на $\{0,1\}^n$ (и здесь шары обладают экстремальным свойством).

Эти три изопериметрические теоремы, а также связанные с ними неравенства для концентрации, стали как бы краеугольным камнем для дальнейших интенсивных исследований свойства концентрации меры в самом широком смысле. Наряду с вычленением классов пространств с мерой, удовлетворяющих тем или иным неравенствам для концентрации (проблема общности), вот уже более 20 лет идут поиски методов, позволяющих глубже понять свойство концентрации на сфере, в гауссовском пространстве и на дискретном кубе. По-видимому, доказательство П. Леви, относящееся еще к 1919 г. ([176], [177]) долго оставалось не понятым. С другой стороны, доказательство Э. Шмидта (1948 г., [206]) было уже совершенно строгим, однако, очень длинным и сложным. В 1980 г. М. Громовым [135] было представлено строгое изложение идей Леви с обобщением его теоремы на широкий класс римановых многообразий. Ранее новое, более простое доказательство этой теоремы, с использованием индукционного элемента, было найдено Т. Фигелем, Ж. Линденштраусом и В. Д. Мильманом (1977 г., [130]). Позднее Мильман и Шехтман [192] приводят рассуждение, позволяющее получить неравенство для концентрации на сфере, подобное (0.6), на основе гауссовского неравенства типа (0.4).

В 1976 г. И. А. Ибрагимов, В. Н. Судаков и Б. С. Цирельсон [117] предлагают чисто вероятностный подход к "гауссовской" концентрации, основанный на применении формулы Ито к определенным функционалам от броуновского движения. В частности, ими получено новое, хотя и близкое к (0.4), неравенство для отклонений липшицевых функций g на $\mathbf{R}^n$ относительно среднего значения $\mathbf{E}g$ (в смысле меры γ_n)

$$\gamma_n\big\{\, g - \mathbf{E}g \geq h \,\big\} \leq 2(1 - \Phi(h)), \quad h \geq 0. \tag{0.10}$$

Эта статья (также, как и [40]), по-видимому, долго оставалась незамеченной многими исследователями. По-крайней мере, через 10 лет метод [117] был переоткрыт Б. Морэ и Ж. Пизье [202], доказавшими неравенство

$$\mathbf{E}e^{t\,(g-\mathbf{E}g)} \leq e^{t^2/2}, \quad t \in \mathbf{R}, \tag{0.11}$$

и вытекающую из него (немного более слабую по сравнению с (0.10)) оценку

$$\gamma_n\big\{\, g - \mathbf{E}g \geq h \,\big\} \leq e^{-h^2/2}, \quad h \geq 0.$$

В 1985 г. Цирельсон исследует свойство гауссовской концентрации с точки зрения смешанных объемов [46, II], используя полученные С. Шеве [116] бесконечномерные аналоги классических неравенств Александрова–Фенхеля. В частности, в классе выпуклых функций g, им доказан усиленный вариант (0.11),

$$\mathbf{E} \exp\{\inf_y g(y) - \frac{1}{2}|x-y|^2\} \le \exp\{\mathbf{E} g\}. \tag{0.12}$$

Это неравенство можно записать и в терминах (произвольного) ограниченного гауссовского случайного процесса x_t:

$$\mathbf{E} \exp\{\sup_t (x_t - \sigma_t^2/2)\} \le \exp\{\mathbf{E} \sup_t x_t\}.$$

Другой подход к (0.12) недавно предложен Р. А. Витале [228]. В действительности, это неравенство справедливо для любых измеримых функций g: условие выпуклости снято в работе С. Г. Бобкова и Ф. Гетце [76], где дано простое доказательство, использующее только неравенство Брунна–Минковского и подход Морэ к неравенствам для так называемой инфимум-свертки (кроме того, (0.12) оказывается равносильным одному транспортному неравенству для гауссовской меры, полученному недавно М. Талаграном, см. [222]).

В 1983 г. опубликована важная работа А. Эрхарда [126], где была развита техника симметризации множеств в гауссовском пространстве $(\mathbf{R}^n, \gamma_n)$. Исследуя свойства некоторых операций по "улучшению" множеств (сохраняющих меру $\gamma_n(A)$ и в то же время не увеличивающих значение $\gamma_n(A^h)$), Эрхард получил прямое доказательство изопериметрической теоремы (0.1) (то есть, без использования теоремы П. Леви). Им было доказано и другое замечательное неравенство типа Брунна–Минковского для гауссовской меры (см. также [9], [14], [21])

$$\Phi^{-1}\big(\gamma_n((1-t)A + tB)\big) \ge (1-t)\Phi^{-1}\big(\gamma_n(A)\big) + t\Phi^{-1}\big(\gamma_n(B)\big), \tag{0.13}$$

где $0 \le t \le 1$, и A и B – произвольные непустые выпуклые множества в $\mathbf{R}^n$. Как замечено М. Леду [176], если взять в качестве

B шар подходящего радиуса с центром в нуле и устремить $t \to 0$, то в пределе (0.13) даст гауссовское изопериметрическое неравенство, однако, только для выпуклых A. Недавно Р. Латала [169] снял условие выпуклости для одного из множеств и, таким образом, (0.2) можно рассматривать как следствие неравенства Эрхарда (в то же время, до сих пор неизвестно, справедливо ли (0.13) для произвольных измеримых A и B).

Однако, по-видимому, и прямое доказательство Эрхарда гауссовского изопериметрического неравенства не уменьшило желение найти более короткие пути к гауссовской концентрации. В 1985 г. Пизье [202] получил целое семейство интегро-дифференциальных неравенств для гауссовской меры, а Морэ нашел для них совершенно элементарное доказательство (см. [9], [179]). В частности, для любой выпуклой функции Ψ на $\mathbf{R}$ и любой суммируемой по мере γ_n гладкой функции g на $\mathbf{R}^n$ с градиентом ∇g

$$\mathbf{E}\Psi(g - \mathbf{E}g) \le \int_{\mathbf{R}^n} \int_{\mathbf{R}^n} \Psi\Big(\frac{\pi}{2}\,\langle \nabla g(x), y\rangle\Big) d\gamma_n(x)\, d\gamma_n(y). \tag{0.14}$$

Это неравенство – один из самых элементарных подходов к гауссовской концентрации. При $\Psi(x) = |x|$, $\Psi(x) = |x|^2$ и $\Psi(x) = e^x$, (0.14) превращается соответственно в неравенства

$$\mathbf{E}|g - \mathbf{E}g| \le \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \mathbf{E}|\nabla g|, \tag{0.15}$$

$$\mathbf{E}|g - \mathbf{E}g|^2 \le \frac{\pi^2}{4}\, \mathbf{E}|\nabla g|^2, \tag{0.16}$$

$$\mathbf{E}e^{g - \mathbf{E}g} \le \mathbf{E}e^{\frac{\pi^2}{8}|\nabla g|^2}. \tag{0.17}$$

В частности, если есть условие $\|g\|_{\mathrm{Lip}} \le 1$, то $|\nabla g| \le 1$, и неравенство (0.17) приводит нас к (0.11), правда, с худшей постоянной в экспоненте. Неравенство (0.16) с оптимальной постоянной,

$$\mathbf{E}|g - \mathbf{E}g|^2 \le \mathbf{E}|\nabla g|^2, \tag{0.18}$$

было известно давно, хотя много раз и переоткрывалось; это – так называемое гауссовское неравенство типа Пуанкаре. В 1975 г., исследуя свойство гиперсжатия оператора Орнштейна–Уленбека, Л. Гросс [138] получил более сильное неравенство, логарифмическое неравенство типа Соболева

$$\mathbf{E}g^2 \log g^2 - \mathbf{E}g^2 \log \mathbf{E}g^2 \le 2\,\mathbf{E}|\nabla g|^2. \tag{0.19}$$

Вопрос о том, каким образом такие логарифмические неравенства связаны с гауссовской концентрацией, начал интенсивно исследоваться лишь в последнее время, и мы вернемся к этому вопросу позже. Как бы то ни было, такое обилие неравенств, даже для гауссовской меры, естественно вызывает вопрос о том, какие неравенства лучше, или какие неравенства ближе к гауссовскому изопериметрическому неравенству. Что касается неравенств (0.15)–(0.19), то каждое из них может быть получено как следствие изопериметрического неравенства для гауссовской меры. На этих примерах проявляется глубокая связь изопериметрических неравенств и неравенств для концентрации с неравенствами типа Соболева, причем гауссовость играет лишь подчиненную роль. Чтобы понять такие взаимоотношения, лучше рассмотреть как можно более абстрактную ситуацию, тем более, что по неравенствам для концентрации негауссовских мер накоплен довольно богатый материал.

Большую часть исследуемых изопериметрических задач можно рассматривать в рамках следующей абстрактной схемы. С произвольным метрическим пространством (M, ρ), снабженным борелевской вероятностной мерой μ, связана функция

$$R_{h,\mu}(p) = \inf \big\{ \mu(A^h) : \mu(A) \ge p \big\}, \qquad p \in (0,1),\ h > 0. \tag{0.20}$$

Инфимум в (0.20) берется по всем борелевским множествам $A \subset M$ меры $\mu(A) \ge p$, и

$$A^h = \big\{ x \in \mathbf{R}^n : \exists\, a \in A,\ \rho(a,x) < h \big\}$$

– открытая h-окрестность A в метрике ρ. Решить изопериметрическую задачу для (M, ρ, μ) – значит найти эту функцию R_μ, явно или неявно, например, указав экстремальные A. Эквивалентно: для всех $p \in (0,1)$ и $h > 0$

$$\sup_g \mu\big\{\, g - m_p(g) \geq h \,\big\} = \sup_g \mu\big\{\, g - m_p(g) \leq -h \,\big\} = 1 - R_{h,\mu}(p),$$

где $m_p(g)$ – квантиль порядка p функции g как случайной величины по отношению к мере μ, и супремум берется в классе всех функций g на M с липшицевой константой

$$\|g\|_{\mathrm{Lip}} = \sup_{x \neq y} \frac{|g(x) - g(y)|}{\rho(x,y)} \leq 1.$$

Таким образом, изопериметрическую задачу в (M, ρ, μ) с геометрической формулировкой (0.20) можно представить и как типично вероятностную задачу о вероятностях больших уклонений.

Другой способ определения изопериметрической задачи в M связан с понятием периметра. Величина

$$\mu^+(A) = \liminf_{h \to 0^+} \ \frac{\mu(A^h) - \mu(A)}{h}$$

называется μ-периметром множества $A \subset M$ (точнее, внешним μ-периметром по Минковскому, см. [198]), а функция

$$I_\mu(p) = \inf_{\mu(A) = p} \mu^+(A), \quad 0 < p < 1, \tag{0.21}$$

где инфимум берется по всем измеримым A меры $\mu(A) = p$, – изопериметрической функцией меры μ. Если μ не имеет атомов, то эта функция связана с $R_{h,\mu}$ простым соотношением

$$I_\mu(p) = \liminf_{h \to 0^+} \ \frac{R_{h,\mu}(p) - p}{h}. \tag{0.22}$$

Например, для гауссовской меры, в силу (0.1), мы имеем $I_{\gamma_n}(p) = \varphi\big(\Phi^{-1}(p)\big)$, где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}$ – плотность γ_1. Аналогично, устремляя в (0.5) $h \to 0$, мы получим

$$\sigma_{n-1}(A) = \sigma_{n-1}(B) \ \Rightarrow \ \sigma_{n-1}^+(A) \geq \sigma_{n-1}^+(B), \tag{0.23}$$

и значит $I_{\sigma_n}(p) = \sigma_{n-1}^{+}(B)$, где B – (любой) шар на S^{n-1} σ_{n-1}-меры p. Эти определения, конечно, имеют смысл и для невероятностных мер. Так, классическое изопериметрчское неравенство в $\mathbf{R}^n$ ([12], [22], [142])

$$\mathrm{Vol}_n(A^h) \geq \mathrm{Vol}_n(B^h),$$

где B – шар в $\mathbf{R}^n$ объема $\mathrm{Vol}_n(A) = \mathrm{Vol}_n(B)$, можно записать как утверждение об изопериметрической функции меры Лебега Vol_n: $I_{\mathrm{Vol}_n}(p) = n\omega_n^{1/n} p^{(n-1)/n}$ (ω_n – объем единичного шара).

Таким образом, мы имеем две изопериметрические задачи, связанные с метрическим вероятностным пространством: одна – о минимизации периметра (будем ее в дальнейшем называть изопериметрической задачей в дифференциальной форме), и другая, формально более сложная ввиду (0.22), – о минимизации величины $\mu(A^h)$ (будем ее называть изопериметрической задачей в интегральной форме). В "канонических" ситуациях, например, когда μ – мера Лебега в $\mathbf{R}^n$, на сфере или гауссовская мера, две эти задачи эквивалентны, и поэтому говорят просто об изопериметрической задаче. Однако, для многих других пространств функцию $R_{h,\mu}$ нельзя восстановить по функции I_μ, и следует уточнять о какого рода задаче или неравенстве идет речь. Соответственнно, следует различать неравенства изопериметрического типа

$$\mu(A^h) \geq R_h(\mu(A)), \tag{0.24}$$

$$\mu^+(A) \geq I(\mu(A)). \tag{0.25}$$

Различие между (0.24) и (0.25) проявляется в большей степени, когда такие неравенства исследуются не для оптимальных функций $R_{h,\mu}$ и I_μ. Например, из неравенств типа Соболева вида (0.16)–(0.19) и для многих других родственных неравенств, содержащих L^2-норму градиента (если их рассматривать, скажем, по отношению к мере μ в $\mathbf{R}^n$), можно извлечь неравенства для концентрации (0.24). Однако, такие неравенства не содержат в себе информацию о периметре множеств, и из них нельзя извлечь неравенство вида (0.25). С другой стороны, неравенства типа Соболева, содержащие L^1-норму градиента, влекут неравенства как (0.24), так и (0.25). Например, если исходить из (0.15) и применить его к гладким липшицевым функциям, аппроксимирующим поточечно индикаторную функцию множества $A \subset \mathbf{R}^n$, то мы получим в пределе оценку

$$\gamma_n^+(A) \geq 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\gamma_n(A)(1-\gamma_n(A)). \tag{0.26}$$

При $\gamma_n(A) = 1/2$ это неравенство оптимально – есть равенство, когда A – полупространство (и, значит, постоянная $\frac{\pi}{2}$ в (0.14) не может быть улучшена). Однако, (0.26) слабее, чем гауссовское изопериметрическое неравенство, записанное в дифференциальной форме, $\gamma_n^+(A) \geq I_{\gamma_n}(\gamma_n(A))$ при $\gamma_n(A) \neq 1/2$.

Если изопримерические неравенства вида (0.25) играют более важное значение для теории пространств Соболева, то неравенства вида (0.24) носят более прикладной характер с точки зрения концентрации меры (при этом, они остаются осмысленными для дискретных пространств, для которых изопериметрическая функция I_μ всегда равна нулю). Особенно важной в этом контексте является задача об оценивании сверху так называемой функции концентрации $\alpha(h) = 1 - R_{h,\mu}(1/2)$. Первые результаты в этом направлении были получены Мильманом в [29] и [30], исследовавшим на основе теоремы Леви поведение функции α для многообразий Штифеля и Грассмана. Более широкие классы метрических пространств рассмотрены в книге Мильмана и Шехтмана [1986 г., 192], где были подведены итоги многолетней деятельности по исследованию свойства концентрации. Для (компактных, связных) римановых многообразий M размерности $n \geq$

2 с римановой метрикой ρ и нормализованной мерой Лебега μ на M были выделены две характеристики, в терминах которых можно контролировать поведение функции α. Первая из них – так называемая кривизна Ричи $R(M)$ (см. [136]). Пусть $A \subset M$ измеримо, и B – шар на сфере $S^n(r)$ такого радиуса r, что $R(M) = R(S^n(r))$ (то есть, $\frac{n-1}{r^2} = R(M)$). Если $\mu(A) = \sigma_n(B)$ (σ_n – нормализованная мера Лебега на $S^n(r)$), то для всех $h > 0$

$$\mu(A^h) \geq \sigma_n(B^h) \tag{0.27}$$

(h – окрестности рассматриваются соответственно по отношению к метрикам на M и $S^n(r)$). Эквивалентно, в терминах изопериметрических функций справедливо неравенство $I_\mu(p) \geq I_{\sigma_n}(p)$ для всех $p \in (0,1)$. Эта теорема, полученная М. Громовым в 1980 г. ([135], [136]), применима и к самой сфере $S^n(r)$, и тогда мы приходим к теореме П. Леви. Как следствие, как и на сфере, имеют место гауссовские оценки для функции концентрации типа (0.6).

Другое важное открытие, сделанное Громовым и Мильманом в [137], состояло в том, что функцию концентрации можно контролировать в терминах первого нетривиального собственного числа λ_1 оператора Лапласа $-\Delta$ на M. Это число может быть определено как оптимальная постоянная в неравенстве типа Пуанкаре

$$\lambda_1 \operatorname{Var}(g) \leq \mathbf{E}|\nabla g|^2 \ \big(= \langle -\Delta g, g \rangle \big). \tag{0.28}$$

(g – произвольная гладкая функция на M, и математическое ожидание и дисперсия понимаются в смысле меры μ). Как доказано в [137], для всех $p \in (0,1)$ и $h \geq 0$ справедливо неравенство

$$1 - R_{h,\mu}(p) \leq (1-p^2) \exp\{-h\sqrt{\lambda_1} \log(1+p)\}, \tag{0.29}$$

и, как следствие, функция α имеет экспоненциальное убывание. На самом деле, определение (0.28) (в отличие от понятия кривизны и связанного с ней неравенства (0.27)) выводит нас далеко за рамки римановой геометрии. В частности, неравенство (0.29) сохраняет силу для произвольных вероятностных метрических пространств (M, ρ, μ), если, конечно, определять модуль градиента $|\nabla g|$ подходящим образом. Таким определением служит соотношение

$$|\nabla g(x)| = \limsup_{\rho(x,y)\to 0+} \frac{|g(x) - g(y)|}{\rho(x,y)}, \quad x \in M. \tag{0.30}$$

Например, если исходить из гауссовского неравенства типа Пуанкаре (0.18), то мы получим ослабленный вариант свойства концентрации для γ_n. Другой важный пример – продакт-мера $\mu = \nu^n$ на $M = \mathbf{R}^n$ (с евклидовой метрикой ρ), построенная по двустороннему показательному распределению ν на $\mathbf{R}$ с плотностью $\frac{d\nu(x)}{dx} = \frac{1}{2}\,e^{-|x|}$. Тот факт, что ν удовлетворяет неравенству Пуанкаре, причем с $\lambda_1 = \frac{1}{4}$, был впервые отмечен, по-видимому, А. А. Боровковым и С. А. Утевым [10] (и позднее Клаассеном [159]). Поскольку $\lambda_1(\nu^n) = \lambda_1(\nu)$, в силу теоремы Громова–Мильмана,

$$\alpha(h) = 1 - R_{h,\mu}(1/2) \leq \frac{3}{4}\,e^{-ch}, \quad c = \log(3/2)/2, \tag{0.31}$$

то есть, свойство концентрации для ν^n. Боровков и Утев изучали в [10] вероятностные меры на прямой, удовлетворяющие неравенству типа Пуанкаре, вне связи со свойством концентрации, но ими также было получено неравенство, очень близкое к (0.29). Как было отмечено еще в 1976 г. Цирельсоном, Ибрагимовым и Судаковым [117], можно также получать изопериметрические неравенства для продакт-мер μ^n на $\mathbf{R}^n$, трансформируя меру γ_n в μ^n с помощью отображения $T_n(x) = (T(x_1), \cdots, T(x_n))$, где $T : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ – неубывающая функция, имеющая распределение μ относительно γ_1. Если $\|T\|_{\mathrm{Lip}} \leq c$, то из неравенства (0.2) сразу получаем

$$R_{h,\mu^n}(p) \geq \Phi\big(\Phi^{-1}(p) + h/c\big); \qquad \alpha(h) \leq \frac{1}{2}\,e^{-h^2/2c^2} \quad (h > 0).$$

Такие, не зависящие от размерности, неравенства выполняются, в частности, для равномерного распределения на кубе $[0,1]^n$ с $c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Однако, отображение T, переводящее γ_1 в ν не является липшицевым, и поэтому извлечь какую-либо информацию о концентрации ν^n на основе неравенства (0.2) нельзя, но на основе неравенства Пуанкаре – можно. Нельзя, как было отмечено в [117], получить на основе (0.2) и неравенство для концентрации на дискретном кубе $\{0,1\}^n$: и здесь функция T не будет липшицевой. Позднее мы обсудим различные подходы к свойству концентрации на основе неравенств типа Пуанкаре, но сейчас лишь отметим, что неравенство (0.29) сохраняется и для многих дискретных пространств (см. [57]).

Изопериметрические задачи и свойство концентрации для распределений на дискретных пространствах уже сами по себе составляют большое направление на стыке многих дисциплин. Сюда можно отнести и ряд других экстремальных задач: задачу о минимальном числе граничных ребер подмножества конечного графа при фиксированном объеме ("edge-isoperimetric problems"), о множествах с минимальным диаметром и о множествах, имеющих минимальный диаметр в среднем (изодиаметральные задачи), задачи о минимизации различных поверхностных мер, о некоторых других функционалах, заданных на семействах подмножеств дискретного куба (связанных, например, с понятием "influences") и т.д. Некоторые из этих задач исследовались еще в начале 1960-х гг., однако, главным образом с точки зрения экстремальности тех или иных множеств и, в частности, находилась вне сферы интересов роль размерности. Последнее относится и к классической изопериметрической задаче на дискретном кубе.

Как задача о концентрации меры дискретные изопериметрические неравенства стали изучаться лишь с середины 1970 гг. (сначала в рамках теории кодирования, где свойство концентрации появилось под именем "blowing-up property"). Используя индукцию по размерности, в 1976 г. Альсведе, Гакс и Кернер [51] доказывают неравенства для концентрации произвольных продакт-мер $\mathbf{P} = \mu^n$ на дискретном кубе $\{0,1\}^n$ типа (0.8) (и, более общо, на пространствах M^n с конечным множеством M), оперируя при этом гауссовской изопериметрической функцией. В частности, ими доказано неравенство

$$\mathbf{P}(A^h) \geq \Phi\big(\Phi^{-1}(\mathbf{P}(A)) + \frac{(h-1)a}{\sqrt{n}}\big), \quad h \geq 1 \text{ целое}, \tag{0.32}$$

где $A \subset \{0,1\}^n$, $a = \dfrac{w}{3\sqrt{\log(1/w)}}$, $w = \min(\mu(\{0\}), \mu(\{1\})$, и A^h – h-окрестность в смысле расстояния Хamминга. Тот факт, что такие неравенства для концентрации должны быть "безразличны" по отношению к мере μ на $\{0,1\}$ (в предположении $\mathbf{P}(A) \geq \frac{1}{2}$ постоянная a в (0.32) может быть выбрана абсолютной) стал очевидным наверное немного позже, когда стал применяться метод мартингальных разностей. Мартингальный подход, используемый и раньше при изучении сумм независимых векторов (впервые, по-видимому, В. В. Юринским [47] и К. Азумой, согласно [192] и [219]), был адаптирован к задачам о концентрации в работе Морэ [187] (им было получено неравенство для концентрации на симметрической группе, см. также [209], [192]). При таком подходе можно получить довольно абстрактную версию неравенства (0.8) для продакт-мер $\mathbf{P} = \mu_1 \times \cdots \times \mu_n$ на $M = \{0,1\}^n$ (и даже на произвольных декартовых произведениях $M = M_1 \times \cdots \times M_n$) по отношению к "взвешенному" расстоянию Хамминга

$$\rho_\alpha(x,y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \, 1_{\{x_i \neq y_i\}}, \quad x, y \in M, \ \alpha_i > 0, \ \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = 1.$$

Именно, в такой метрике для h-окрестности $A^h_{\rho_\alpha}$ любого множества $A \subset M$ меры $\mathbf{P}(A) \geq \frac{1}{2}$ справедливо неравенство [192]

$$1 - \mathbf{P}(A^h_{\rho_\alpha}) \leq c_1 \, e^{-h^2/c_2}, \quad h \geq 0, \tag{0.33}$$

с абсолютными постоянными $c_1 = 2$, $c_2 = 16$. Существует и другой подход к (0.33), предложенный в 1986 г. К. Мартон [185]. Он основан на т.н. "транспортных" неравенствах и позволяет получать более точные константы (см. также [186], [222], [76]). В неравенстве (0.33) размерность n уже как бы спрятана, однако, на самом деле, еще не видно никакой связи с гауссовской концентрацией. Действительно, если рассматривать изопериметрическую задачу для равномерного распределения $\mathbf{P}$ на $\{0,1\}^n$ по отношению к евклидовому расстоянию в $\mathbf{R}^n$ (т.е., для h-окрестностей $A^h = A + hB_2$ множеств $A \subset \mathbf{R}^n$), то для всех $p \in (0,1)$ и $h > 0$ мы имеем очевидное соотношение (отмеченное еще в [117])

$$\inf_{\mathbf{P}\,(A) \geq p} \mathbf{P}\,(A^h) \to p \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

и в этом смысле нет никакой "не зависящей" от размерности концентрации. Однако, если рассматривать изопериметрическую задачу не в классе всех A, а только для выпуклых A, то как и в гауссовском случае, мы имеем дело с "настоящей" концентрацией:

$$1 - \mathbf{P}\,(A^h) \leq \frac{1}{\mathbf{P}\,(A)}\, e^{-h^2/2}, \quad A \subset \mathbf{R}^n \text{ – выпукло.} \tag{0.34}$$

Это важное открытие было сделано в 1988 г. М. Талаграном в работе [213], начавшей серию глубоких работ этого автора по исследованию свойства концентрации продакт-мер. Неравенство (0.34) оказывается справедливым для любых продакт-мер на кубе $[0,1]^n$, и позднее Талагран [215], [219] получает это утверждение как следствие усиленного варианта (0.33) для продакт-мер на абстрактных декартовых произведениях

$$1 - \mathbf{P}\left(\bigcap_\alpha A^h_{\rho_\alpha}\right) \leq c_1\, e^{-h^2/c_2}, \quad h \geq 0, \tag{0.35}$$

(так что формально ни о какой выпуклости речи не идет) и находит дальнейшие усиления этого свойства в [221]. Основным мотивом становится уже не столько свойство концентрации само по себе, сколько желание понять природу множеств A меры 1/2. В этом абстрактном мотиве существует много конкретных проблем. Свойство концентрации в продакт-пространствах $(M, \rho_\alpha, \mathbf{P}\,)$ позволяет контролировать (приближать по числу совпадающих координат) "почти" все точки $x \in M$ какой-то одной точкой a в A. Мы получим близкую к изопериметрической задачу, если будем контролировать точки $x \in M$ конечными подмножествами A мощности $q \geq 2$. Соответствующее неравенство изопериметрического типа было получено Талаграном в [214]. Вместе с (0.34) оно составляет тот базис, на основе которого можно далеко продвинуть многие классические проблемы т.н. "вероятности в банаховых пространствах", такие как многомерный закон повторного логарифм, распределение нормы сумм независимых векторов (см. [214], [179], [176]).

Также проблему концентрации продакт-мер $\mathbf{P} = \mu^n$ в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ Талагран склонен рассматривать не с точки зрения оценивания скорости убывания функции концентрации α. По Талаграну, более важной является задача о нахождении вместо обычных евклидовых h-окрестностей множеств A^h в некотором смысле минимальных окрестностей $U_h(A)$ (точнее, о нахождении операции, описывающей такие окрестности), для которых выполняется свойство: для всех $A \subset \mathbf{R}^n$, $a \in \mathbf{R}$, $h \geq 0$

$$\mathbf{P}\,(A) = \mu((-\infty, a]) \Rightarrow \mathbf{P}\,(U_h(A)) \geq \mu((-\infty, a+h]), \tag{0.36}$$

или немного в более ослабленной форме, как свойство концентрации

$$\mathbf{P}\,(A) \geq \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - \mathbf{P}\,(U_h(A)) \leq \alpha_0(h), \tag{0.37}$$

например, с функцией вида $\alpha_0(h) = c\,e^{-h/c}$. В случае $\mathbf{P} = \gamma_n$, $U_h(A) = A^h$, (0.36) есть в точности изопериметрическая теорема (0.1). Еще одно открытие, сделанное Талаграном в [216], состоит в том, что свойству (0.36) удовлетворяет продакт мера $\mathbf{P} = \nu^n$, построенная по двустороннему показательному распределению ν на $\mathbf{R}$, причем для окрестностей вида

$$U_h(A) = A + c_1 h B_1 + c_2 \sqrt{h} B_2,$$

где c_1, c_2 – абсолютные постоянные, а B_1 и B_2 – единичные шары в $\mathbf{R}^n$ в смысле метрики ℓ^1 и ℓ^2 соответственно. В частности, выполняется свойство (0.37) с указанной функцией α_0 – т.н. талаграновское свойство концентрации для ν^n. Неожиданное следствие этой теоремы Талаграна (и, возможно, основной мотив) состоит в том, что, трансформируя ν^n в γ_n с помощью отображения вида $T_n(x) = (T(x_1), \cdots, T(x_n))$, мы придем к гауссовской концентрации, то есть, к неравенству вида $1 - \gamma_n(A^h) \leq c_1 e^{-h^2/c_2}$ $\big(\gamma_n(A) \geq \frac{1}{2}\big)$. Можно таким же образом трансформировать ν^n и в другие, например, логарифмически вогнутые продакт-меры μ^n, при этом будут справедливы неравенства, аналогичные (0.37) (широкий класс неравенств такого вида получен в [219] в рамках т.н. "penalties"). В 1991 г. Морэ [188] несколько усовершенствовал подход Талаграна, введя в качестве функциональной формы для (0.37) экспоненциальные неравенства

$$\int_{\mathbf{R}^n} e^{S_w g(x)}\, d\mu^n(x) \int_{\mathbf{R}^n} e^{-g(x)}\, d\mu^n(x) \leq 1,$$

где g – произвольная измеримая функция на $\mathbf{R}^n$ и

$$S_w g(x) = \inf_y \left[g(y) - \sum_{i=1}^n w(x_i - y_i) \right]$$

– инфимум-свертка g с функцией $\sum_{i=1}^n w(x_i)$. Такие неравенства легко распространяются с $n = 1$ на многомерные пространства, и в случае $\mu = \nu$ к (0.37) приводит неравенство Морэ с функцией $w(x) = c \min(|x|, |x|^2)$ при подходящем $c > 0$.

Заметим, что свойство (0.37) для меры ν^n – существенно более сильное по сравнению с неравенством (0.31), вытекающего из неравенства типа Пуанкаре. Тем не менее, как было недавно показано в работе Бобкова и Леду [83], неравенства типа Пуанкаре довольно сильны и на самом деле влекут свойство концентрации (0.37) для продакт-мер даже на произвольных метрических пространствах. Другой ("информационный") подход к неравенствам Талаграна предложен А. Дембо и О. Зейтуни [123], [124].

Итак, к гауссовской концентрации ведут по-крайней мере два подхода, основанные на изучении негауссовских продакт-мер: неравенство (0.37) для ν^n и неравенство на дискретном кубе (0.34), которое в результате применения центральной предельной теоремы превращается в неравенство

$$1 - \gamma_n(A^h) \leq \frac{1}{\gamma_n(A)}\, e^{-h^2/8},$$

правда, только для выпуклых $A \subset \mathbf{R}^n$. В обоих случаях нельзя оценить "гауссовский" периметр множеств и получить, например, изопериметрическое неравенство в дифференциальной форме

$$\gamma_n^+(A) \geq c\,\varphi(\Phi^{-1}(\gamma_n(A)), \tag{0.38}$$

пусть даже с точностью до некоторой постоянной $c \in (0,1)$. Это было бы, конечно, более сильное утверждение, чем просто гауссовская концентрация, так как (0.38) эквивалентно неравенству в интегральной форме

$$\gamma_n(A^h) \geq \Phi\big(\Phi^{-1}(\gamma_n(A)) + ch\big), \quad h > 0.$$

Такое более деликатное свойство было доказано М. Леду, развившим технику полугрупп для операторов Орнштейна–Уленбека [176] (еще ранее Леду применял эту технику для получения неравенств для концентрации [173], [174]). Кроме того, как оказалось, можно вывести неравенство (0.38) и на основе подходящих изопериметрических неравенств на дискретном кубе, установленных Талаграном в [217] (см. также [220]).

Заметим, что на дискретных, например, конечных пространствах (M, ρ, μ) (в отличие от "непрерывных") бессмысленно определять периметр $\mu^+(A)$ и изопериметрическую функцию I_μ с помощью (0.21). Тем не менее, (дискретная) граница множества $A \subset M$ – понятие вполне осмысленное. Так, в случае дискретного куба $M = \{0,1\}^n$ с расстоянием Хамминга ρ границей $A \subset M$ служит множество $\partial A = A^1 \setminus (M \setminus A)^1$ точек, лежащих на граничном ребре (где A^1 означает h-окрестность в смысле ρ при $h = 1$). Каждая точка $x \in M$ имеет n "соседей" $\{s_i(x)\}_{1 \le i \le n}$, определяемых равенствами $(s_i(x))_j = x_j$ при $j \neq i$, и $(s_i(x))_i = 1 - x_i$. Множества

$$\partial_+ A = \{x \in A : \exists i \ s_i(x) \notin A\}, \quad \partial_- A = \{x \notin A : \exists i \ s_i(x) \in A\}$$

состоят из граничных точек $A \subset M$ соответственно с "внутренней" и "внешней" стороны, так что $\partial A = \partial_+ A \cup \partial_- A$. Тогда теорему Харпера можно эквивалентно записать как неравенство

$$\mathbf{P}\,(\partial_+ A) \ge \mathbf{P}\,(\partial_+ B),$$

где $\mathbf{P}$ – равномерное распределение на M, и B – шар (Хамминга) такого же "объема", что и A. Величина $\mathbf{P}\,(\partial_+ A)$ может служить своего рода периметром A, но эта характеристика оказывается довольно грубой (точнее, недостаточно тонкой для приложений). Больше информации несет в себе функция

$$h_A(x) = card\{i \le n : (x \in A, s_i(x) \notin A) \text{ или } (x \notin A, s_i(x) \in A)\}$$

– число граничных ребер, у которых x служит одной из вершин. Функция $h_A 1_A$ была введена Г. А. Маргулисом, доказавшим в

1974 г. по существу неравенство изопериметрического типа [23]

$$\mathbf{P}\,(\partial_+ A) \int_A h_A \, d\,\mathbf{P} \ \geq c(\,\mathbf{P}\,(A)), \tag{0.39}$$

где c – положительная функция на (0,1), на зависящая от размерности n. Маргулис установил (0.39) даже в более общей ситуации, когда $\mathbf{P} = \mu_p^n$ – продакт-мера на $\{0,1\}^n$ с маргинальным распределением μ_p, приписывающем массу $p \in (0,1)$ точке 1 и $q = 1 - p$ – точке 0, и соответственно правая часть $c = c(p, \mathbf{P}\,(A))$ также зависит от p. Такое утверждение было основным шагом при доказательстве обнаруженного им свойства в рамках теории графов, ныне называемом "threshold phenomenon": для монотонных множеств $A \subset \{0,1\}^n$ функция $p \to \mu_p^n(A)$, непрерывно возрастая вместе с p от 0 до 1, делает в некоторой точке p_0 резкий скачок (то есть, является "почти" индикаторной функцией интервала $(p_0, 1)$). Талагран исследовал в [217] количественную сторону такого свойства, причем на основе более сильного неравенства по сравнению с (0.39):

$$\int_A \sqrt{h_A}\, d\,\mathbf{P} \ \geq K_p \, I_0(\,\mathbf{P}\,(A)). \tag{0.40}$$

Здесь $I_0(t) = J(t(1-t))$, $J(s) = s\sqrt{\log(1/s)}$, $\mathbf{P} = \mu_p^n$, и K_p – постоянная, зависящая только от p. Талагран рассматривает величину $\int_A \sqrt{h_A}\, d\,\mathbf{P}$ как поверхностную меру, родственную гауссовскому периметру, а само неравенство (0.40) – как дискретную версию гауссовского неравенства (0.38) (заметим, что функция I_0 может быть оценена сверху и снизу гауссовской изопериметрической функцией I_{γ_1} с точностью до абсолютных множителей). При доказательстве (индукцией по размерности n) Талагран использует функциональную форму

$$K_p \, I_0(\mathrm{Var}(g)) \leq \mathbf{E}\, \mathrm{M}\, g, \quad 0 \leq g \leq 1, \tag{0.41}$$

где
$$(\mathrm{M}\, g)(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \big((g(x) - g(s_i(x))^+\big)^2}, \quad x \in \{0,1\}^n,$$
представляет собой аналог модуля дискретного градиента функции g на $\{0,1\}^n$. Применяя неравенство (0.41) в пространствах большей размерности к функциям вида
$$g_k(x) = g\Big(\frac{x_1 + \cdots + x_k - kp}{\sqrt{kpq}}\Big), \quad x_i \in \{0,1\}^n,$$
с гладкими функциями g на $\mathbf{R}^n$ и устремляя $k \to \infty$, мы придем, в силу центральной предельной теоремы в $\mathbf{R}^n$, к аналогичному функциональному неравенству относительно гауссовской меры γ_n и затем, аппроксимируя функциями g индикаторные функции, действительно получим (0.38).

Таким образом, можно получить усиленный вариант гауссовской концентрации и на основе дискретных неравенств Соболева типа (0.41). Но можно ли, основываясь только на свойствах дискретного куба, получить изопериметрическую теорему в гауссовском пространстве в полном объеме, то есть, извлечь неравенство (0.38) с $c = 1$ и значит установить экстремальное свойство полупространств (0.1)? Как было предположено в [117], вряд ли можно обойти геометрические рассуждения типа симметризации. Тем не менее, это сделать можно, причем на основе неравенств Соболева совершенно особого вида, о которых в дальнейшем пойдет речь. Для подмножеств A дискретного куба $\{0,1\}^n$, в дополнение к талаграновской поверхностной мере, мы исследуем в качестве дискретного периметра еще одну величину,
$$\mathbf{P}^{\,+}(A) = \int \sqrt{pq\, h_A}\, d\,\mathbf{P}\,, \quad \mathbf{P} = \mu_p^n, \tag{0.42}$$
и одним из наших основных результатов будет изопериметрическое неравенство для равномерного распределения $\mathbf{P}$:
$$\mathbf{P}^{\,+}(A) \geq \varphi(\Phi^{-1}(\mathbf{P}\,(A)). \tag{0.43}$$

Это – чистая копия гауссовского изопериметрического неравенства (0.2), записанного в дифференциальной форме

$$\gamma_n^+(A) \geq \varphi(\Phi^{-1}(\gamma_n(A)). \tag{0.44}$$

Требуется, однако, сделать еще один шаг, чтобы связать эти два неравенства – "поддержать" (0.43) некоторой функциональной формой. Дело в том, что если мы попытаемся перейти от (0.43) к (0.44) с помощью центральной предельной теоремы в $\mathbf{R}^n$, применяя первое неравенство к подмножествам $\{0,1\}^{nk}$ вида

$$A_k = \Big\{(x_1, \dots, x_k) : x_i \in \{0,1\}^n, \, \frac{2(x_1 + \cdots + x_k) - n}{\sqrt{k}} \in A\Big\}, \quad A \subset \mathbf{R}^n,$$

то мы, конечно, получим $\mathbf{P}\,(A_n) \to \gamma_n(A)$ при $k \to \infty$ для всех γ_n-непрерывных A, однако, при $n \geq 2$ соотношение

$$\mathbf{P}^{\,+}(A_k) \to \gamma_n^+(A), \quad k \to \infty,$$

теряет силу уже для таких "регулярных" множеств A, как полупространства. Сам по себе этот факт, на первый взгляд противоречащий локальной предельной теореме, достоин самого пристального изучения, но он хорошо подтверждает идею о том, что переход от "дискретных" объектов к "непрерывным" должен сопровождаться определенными функциональными соотношениями. Для изопериметрических неравенств мы рассмотрим несколько функциональных форм, но в данном случае, на дискретном кубе $\{0,1\}^n$ с равномерным распределением $\mathbf{P}$, наиболее сильной из них будет неравенство вида

$$I(\mathbf{E}g) \leq \mathbf{E}\sqrt{I(g)^2 + |\nabla g|^2}, \quad 0 \leq g \leq 1, \tag{0.45}$$

где $|\nabla g|$ – модуль дискретного градиента,

$$|\nabla g(x)| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \Big| \frac{g(x) - g(s_i(x))}{2} \Big|^2}, \quad x \in \{0,1\}^n,$$

и $I(p) = \varphi(\Phi^{-1}(p))$. Это функциональное неравенство уже влечет точно такое же неравенство для гауссовской меры (в классе всех локально липшицевых функций g на $\mathbf{R}^n$ со значениями в $[0,1]$), и такое гауссовское неравенство на индикаторных функциях приведет нас к (0.44). С другой стороны, на индикаторных функциях (0.45) превращается в неравенство (0.43).

Ключевое свойство функциональных неравенств вида (0.45), где, вообще говоря, функция I может быть любой и квадрат модуля градиента $|\nabla g|^2$ может быть "почти" любым (аддитивным) оператором, заключается в том, что, если такое неравенство справедливо для меры μ, то оно будет иметь силу для всех продакт-мер μ^n. Таким образом, можно сказать, вся информация об экстремальности полупространств в гауссовском изопериметрическом неравенстве содержится в неравенстве (0.45) на двухточечном пространстве $\{0,1\}$. Это свойство нам позволит исследовть изопериметрическую задачу и для широкого класса других продакт-мер, как дискретных, так и "непрерывных".

Функциональным формам изопериметрических неравенств (как интегральным, так и в дифференциальным) посвящена 1-я глава. Однако, здесь мы еще не рассматриваем форму (0.45), поскольку в общем (негауссовском) случае (0.45) не равносильно изопериметрическому неравенству $\mu^+(A) \geq I(\mu(A))$. Основным результатом в этой главе будет следующее утверждение (в несколько ослабленном виде приведем комбинированный вариант теорем 1.1.1, 1.3.1 и 1.4.1 из соответственно §§ 1.1, 1.2 и 1.3).

Пусть (M, ρ, μ) - произвольное метрическое вероятностное пространство. Пусть I – вогнутая непрерывная функция на [0,1], положительная на (0,1), симметричная относительно точки 1/2 и такая, что

$$\frac{I(pq)}{pq} \leq \frac{I(p)}{p} + \frac{I(q)}{q}, \qquad p, q \in (0,1). \tag{0.46}$$

Как необходимое условие имеем $I(0) = I(1) = 0$. Обозначим через

F (единственную, строго возрастающую, непрерывно дифференцируемую) функцию распределения на прямой $\mathbf{R}$ с плотностью f, удовлетворяющей соотношению

$$I(p) = f(F^{-1}(p)), \quad p \in (0,1),$$

где F^{-1} – функция, обратная к F. Положим $R_h(p) = F(F^{-1}(p)+h)$. Для каждой функции g на M положим

$$(U_h g)(x) = \sup\{g(y) : \rho(x,y) < h\}, \quad h > 0.$$

Теорема 0.1. Следующие условия эквивалентны:

a) для всех измеримых множеств $A \subset M$

$$\mu^+(A) \geq I(\mu(A)); \tag{0.47}$$

b) для всех измеримых множеств $A \subset M$ и всех $h > 0$

$$\mu(A^h) \geq R_h(\mu(A)); \tag{0.48}$$

c) для всех измеримых функций $g : M \to [0,1]$ и $h > 0$

$$\mathbf{E}\, U_h g \geq R_h(\mathbf{E}\, R_{-h}(g))\,; \tag{0.49}$$

d) для любой функции $g : M \to [0,1]$, имеющей конечную липшицеву константу на всех шарах в M,

$$I(\mathbf{E}g) - \mathbf{E}I(g) \leq \mathbf{E}|\nabla g|. \tag{0.50}$$

Математические ожидания здесь понимаются в смысле меры μ. Эквивалентность условий a) и b) устанавливается в § 1.1 – здесь на самом деле используется лишь непрерывность и положительность функции I.

В том случае, когда $I = I_\mu$ удовлетворяет условиям теоремы 0.1, (0.50) действительно может служить функциональной формой для (точного) изопериметрического неравенства (0.47). В частности, все условия теоремы выполнены для гауссовской меры γ_n (мы проверим это в § 1.5). В этом случае функция

$$R_h(p) = \Phi(\Phi^{-1}(p) + h)$$

оптимальна в (0.48), и значит оптимально неравенство (0.49) в том смысле, что оно превращается в равенство на индикаторных функциях полупространств. Следует также отметить, что при $I = I_\mu$ условие (0.46) необходимо для выполнения неравенства (0.50).

В § 1.2 мы остановимся на простейших изопериметрических задачах – для вероятностных мер на $\mathbf{R}$ (по отношению к обычному расстоянию). Уже в этом случае можно получить сравнительно большое семейство изопериметрических функций. В частности, будет показано, что для симметричных логарифмически вогнутых распределений μ функция R_h, определенная выше по функции распределения F меры μ, является оптимальной в (0.48) для всех $h > 0$.

Тот факт, что некоторые изопериметрические неравенства могут быть эквивалентно записаны в виде неравенств типа Соболева, конечно, хорошо известен в литературе. Например, изопериметрическое неравенство для меры Лебега в $\mathbf{R}^n$ эквивалентно неравенству Соболева

$$\int_{\mathbf{R}^n} |\nabla g(x)|\, dx \geq c \left(\int_{\mathbf{R}^n} |g(x)|^{n/(n-1)} dx \right)^{(n-1)/n}, \tag{0.51}$$

где g – произвольная гладкая функция с компактным носителем, и $c = c_n = n\omega_n^{1/n}$. Это неравенство было доказано в 1960 г. независимо Мазья [24] и Федерером и Флемингом [128] (с худшей постоянной c_n неравенство (0.51) было ранее доказано Гальярдо [134] и Ниренбергом [196]). Доказательство (0.51), основанное на применении формулы Кронрода–Федерера для интеграла от модуля градиента,

$$\int_{\mathbf{R}^n} |\nabla g| \, d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} \mu^+\{g > t\} \, dt$$

(где μ – абсолютно-непрерывная мера на $\mathbf{R}^n$), сделало очевидным тот факт, что и по отношению к другим мерам μ на $\mathbf{R}^n$ например, для сужения меры Лебега на области в $\mathbf{R}^n$ неравенство вида (0.51) эквивалентно изопериметрическому неравенству $\mu^+(A) \geq c\,\mu(A)^{(n-1)/n}$. Наиболее общее утверждение в этом направлении получил в 1985 г. О. С. Ротхауз [206], показавший, в частности, что для широкого класса однородных функционалов L, заданных на семействе гладких функций на римановом многообразии M (с римановой мерой μ), неравенство типа Соболева

$$\int_M |\nabla g| \, d\mu \geq L(g) \tag{0.52}$$

равносильно изопериметрическому неравенству

$$\mu^+(A) \geq L(1_A), \quad A \subset M. \tag{0.53}$$

К таким функционалам относятся, например, нормы $L(g) = \|g\|$ в пространствах Лебега и, более общо, в пространствах Орлича $L_\Psi(M,\mu)$ с нормой

$$\|g\|_{L_\Psi(M,\mu)} = \inf\{\lambda > 0 : \mathbf{E}\Psi(g/\lambda) \leq 1\},$$

где Ψ – функция Юнга (т.е., выпуклая неотрицательная четная функция на $\mathbf{R}$, такая что $\Psi(x) > 0$ при $x \neq 0$). Можно также рассматривать функционалы $L(g) = \|g - \mathbf{E}g\|$, что для вероятностных мер более естественно (с другой стороны, теорема Ротхауза не применима к функционалам $L(g) = I(\mathbf{E}g) - \mathbf{E}I(g)$). Эквивалентность (0.52) и (0.53) справедлива на самом деле для произвольных вероятностных метрических пространств (M,ρ,μ) (см. § 1.6).

В §§ 1.6 и 1.7 мы рассмотрим неравенства вида (0.52) для функционалов вида $L(g) = \|g - \mathbf{E}g\|_{L_\Psi(M,\mu)}$, и главный вопрос, который нас будет интересовать, состоит в следующем: существует ли функция Юнга Ψ, для которой неравенство (0.52) равносильно (точному) изопериметрическому неравенству, точнее, содержит в себе точное изопериметрическое неравенство на индикаторных функциях ? Согласно (обобщенной) теореме Ротхауза, функцию Ψ (если она существует) следует выбирать такой, чтобы для всех измеримых $A \subset M$

$$\|1_A - p\|_{L_\Psi(M,\mu)} = I_\mu(p), \quad p = \mu(A). \tag{0.54}$$

В § 1.6 будут найдены в терминах I_μ необходимые и достаточные условия для существования функции Юнга Ψ, удовлетворяющей (0.54). Мы проверим выполнение полученных условий в двух важных ситуациях – для гауссовской меры γ_n и для равномерного распредления σ_n на сфере $S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$. Таким образом, гауссовское изопериметрическое неравенство (0.44) можно записать и как неравенство типа Соболева

$$\mathbf{E}|\nabla g| \geq \|g - \mathbf{E}g\|_{L_\Psi(\mathbf{R}^n,\gamma_n)}. \tag{0.55}$$

Такие неравенства для γ_n ранее исследовались М. Леду [171], а также Е. Пелиция и Г. Таленти [201]. На основе гауссовского изопериметрического неравенства ими было установлено (0.55) для некоторых функций Юнга Ψ, ведущих себя как $x\sqrt{\log x}$ при больших x (напомним, что такое неравенство при $\Psi(x) = c|x|$ было получено Пизье). На индикаторных функциях (в асимптотическом смысле), полученные ими неравенства влекут изопериметрическое неравенство (0.38) с некоторой постоянной $c \in (0.1)$, однако, они все же слабее, чем (0.44).

В § 1.7 и приложении будет доказано аналогичное утверждение для равномерного распределения на сфере:

Теорема 0.2. Пусть $n \geq 2$. Существует функция Юнга Ψ, такая что в классе всех липшицевых функций g на S^n справедливо неравенство типа Соболева

$$\mathbf{E}|\nabla g| \geq \|g - \mathbf{E}g\|_{L_\Psi(S^n, \sigma_n)} \tag{0.56}$$

(математические ожидания берутся по отношению к мере σ_n). При этом, если применить неравенство (0.56) к некоторой последовательности g_n, сходящейся к индикаторной функции компактного множества $A \subset S^n$, то в пределе мы получим экстремальное свойство шаров (0.23).

Отметим, что изопериметрическое неравенство на сфере, в отличие от гауссовского изопериметрического неравенства, записать в форме (0.50) или (0.48) нельзя.

Мы используем теорему 0.1 в главе 2 при изучении изопериметрической задачи для продакт-мер по отношению к равномерному расстоянию (функциональная форма (0.48) позволяет осуществить индукционный шаг, см. § 2.1). Пусть (M, ρ, μ) – сепарабельное метрическое вероятностное пространство. Снабдим декартову степень M^n метрикой

$$\rho_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} \rho(x_i, y_i), \quad x, y \in M^n,$$

и продакт-мерой μ^n. Положим

$$R_{h,\mu^n}(p) = \inf\{\mu^n(A^h) : A \subset M^n, \mu^n(A) \geq p\},$$

где $p \in (0, 1)$, $h > 0$ и A^h – h-окрестность множества A в смысле метрики ρ_∞. Положим $R_{h,\mu^\infty} = \inf_n R_{h,\mu^n}$, так что функция $R = R_{h,\mu^\infty}$ является наилучшей в неравенствах

$$\mu^n(A^h) \geq R(\mu^n(A)), \quad A \subset M, \tag{0.57}$$

в предположении, что "размерность" n может быть произвольной (то есть, эта функция определяет решение изопериметрической задачи для бесконечномерной продакт меры μ^∞ в M^∞ по отношению к псевдо-метрике $\rho_\infty(x,y)=\sup_{i\geq 1}\rho(x_i,y_i)$, $x,y\in M^\infty$).

Основной результат главы 2 состоит в следующем: если мы решим изопериметрическую задачу для (M,ρ,μ), то есть, найдем функцию $R_{h,\mu}$, то мы можем решить изопериметрическую задачу и для $(M^\infty,\rho_\infty,\mu^\infty)$ – найти функцию R_{h,μ^∞} (в предположении, что $R_{h,\mu}$ вогнута на интервале (0,1)). Именно, имеет место:

Теорема 0.3. Пусть $h>0$. Предположим, что функция $R_{h,\mu}$ вогнута на (0,1). Тогда функция R_{h,μ^∞} – максимальная среди всех неубывающих биекций $R:(0,1)\to(0,1)$, мажорируемых функцией $R_{h,\mu}$ и таких, что для всех $p,q\in(0,1)$

$$R(pq)\leq R(p)R(q),\quad S(pq)\geq S(p)S(q),$$

где $S(p)=1-R(1-p)$.

Немного в более общем виде эта теорема будет доказана в § 2.2. Хотя описание функции R_{h,μ^∞} определяет ее неявно, как следствие, можно получить явное решение изопериметрической задачи для ряда интересных распределений. В § 2.3 мы применим теорему 0.3 к симметричным логарифмически вогнутым мерам μ на $M=\mathbf{R}$, для которых функция

$$R_{h,\mu}(p)=F(F^{-1}(p)+h)$$

известна (§ 1.2) (где F – функция распределения μ). В классе таких мер можно дать необходимое и достаточное условие для соотношения $R_{h,\mu^n}=R_{h,\mu}$, что означает, что экстремальными множествами в изопериметрической задаче для $(\mathbf{R}^n,\rho_\infty,\mu^n)$ будут "стандартные" полупространства, то есть множества вида $\{x\in\mathbf{R}^n: x_1\leq const\}$. Таким условием оказывается неравенство

(0.46). Для гауссовской меры γ_n "стандартные" полупространства являются экстремальными в изопериметрической задаче по отношению к более сильному евклидовому расстоянию. Более того, при $n \geq 2$ это свойство характеризует гауссовские меры в классе всех продакт-мер на $\mathbf{R}^n$ (см. § 3.1). Тем не менее, "стандартные" полупространства будут экстремальными и для многих негауссовских распределений, если рассматривать h-окрестности по отношению к метрике ρ_∞. Типичным примером может служить т.н. логистическое распределение μ с функцией распределения $F(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$. Близкой к нему является двустороннее показательное распределение ν, однако, условие (0.46) для него уже не выполняется. В § 2.4 мы проиллюстрируем применение теоремы 0.3 на примере одностороннего показательного распределения μ с плотностью $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$. Будет доказана

Теорема 0.4. Для всех $p \in (0,1)$ и $h > 0$

$$R_{h,\mu^\infty}(p) = \min\left\{p^\alpha,\, 1-(1-p)^{1/\alpha}\right\}, \quad \alpha = e^{-h}.$$

Такое аналитическое описание содержит в себе и некоторую информацию об экстремальных множествах в (0.57) с $R = R_{h,\mu^\infty}$. Именно, "почти" экстремальными в этом изопериметрическом неравенстве являются либо кубы, либо дополнения к кубам. В § 2.5 мы рассмотрим неравенство (0.57) для более узкого класса множеств – так называемых идеалов (монотонных множеств в $\mathbf{R}^n_+$), а в § 2.6 покажем, что для показательного распределения μ в классе таких множеств при условии $\mu^n(A) = const$ величина $\mu^n(A^h)$ (уже при фиксированном n) минимизируется только на кубах. Заметим, что кубы – это шары в $\mathbf{R}^n$ в смысле метрики ρ_∞, и что полупространства тоже можно рассматривать как шары бесконечного радиуса. Рассмотренные примеры подтверждают, таким образом, неформальный тезис: для широкого класса метрических пространств с мерой экстремальные множества следует искать среди шаров и их дополнений (а также, их поточечных пределов).

Наконец, в § 2.7 исследуется такое свойство: $R_{h,\mu^\infty}(p) > p$ для некоторого (эквивалентно, для всех) $p \in (0,1)$. Это свойство, в некотором смысле минимальное требование с точки зрения концентрации меры, тоже может быть сформулировано в терминах $R_{h,\mu}$: существует $\varepsilon = \varepsilon(h) > 0$, такое что для всех $p \in (0,1)$

$$R_{h,\mu}(p) \geq p + \varepsilon p(1-p).$$

Это условие может быть далее упрощено для мер на $M = \mathbf{R}$, если требовать выполнение неравенства $R_{h,\mu^\infty}(p) > p$ с некоторым (достаточно большим) h: неубывающее отображение T_μ, переводящее двустороннее распределение ν в μ, должно порождать конечный модуль, т.е.,

$$T_\mu^*(h) = \sup\{|T_\mu(x) - T_\mu(y)| : |x-y| \leq h\} < +\infty, \quad h > 0 \tag{0.58}$$

(здесь h уже может быть произвольным). Условие (0.58) определяет замечательный класс вероятностных распределений на прямой, связанный с некоторыми другими родственными задачами (как-то неравенства типа Пуанкаре). К нему мы возвратимся позже, и сейчас лишь отметим следующее.

Пусть $(\zeta_i)_{i \geq 1}$ – последовательность независимых случайных величин, имеющих распределение μ. Тогда (0.58) равносильно тому, что последовательные максимумы $\max(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ и минимумы $\min(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ имеют распределения, образующие после центрирования плотное (предкомпактное) семейство в слабой топологии пространства вероятностных мер на прямой. Если взять первую часть этого условия (касающуюся максимумов), то такое свойство исследовалось ранее в работе Л. де Хаана и Г. Риддера [141], нашедших ряд эквивалентных формулировок непосредственно в терминах функции распределения меры μ. Если взять обе части этого условия, то они влекут конечность экспоненциального момента. Такое необходимое условие для свойства концентрации было впервые отмечено М. Талаграном в [216] (Proposition 5.1). Ранее изопериметрическая задача для продакт-мер μ^n в метрических пространствах M^n с равномерным расстоянием практически не рассматривалась. Исключение составляет одна работа Д. Амира и В. Д. Мильмана [58], в которой были получены некоторые общие оценки для функции концентрации $\alpha(h) = 1 - R_{h,\mu^n}\left(\frac{1}{2}\right)$ в терминах $R_{h,\mu}\left(\frac{1}{2}\right)$. Полученные оценки применялись к сфере $M = S^{d-1}$ и затем к некоторым задачам локальной теории банаховых пространств.

В главе 3 мы уже используем функциональную форму (0.45) и применяем ее к дискретным изопериметрическим задачам для продакт-мер $\mathbf{P} = \mu_1 \times \cdots \times \mu_n$ на дискретном кубе $\{0,1\}^n$ и, более общо, на решетке $\mathbf{Z}^n$. Общее утверждение о свойстве "аддитивности", позволяющем распространять такие неравенства на продакт-меры любой размерности, доказывается в § 3.1. В § 3.2 получен основной результат главы:

Теорема 0.5. Для любой функции $g : \{0,1\}^n \to [0,1]$ выполняется неравенство (0.45) по отношению к равномерному распределению $\mathbf{P}$ на $\{0,1\}^n$ с гауссовской изопериметрической функцией $I(p) = \varphi(\Phi^{-1}(p))$. Функция I оптимальна (наибольшая) в этом функциональном неравенстве в классе всех непрерывных функций на [0,1], удовлетворяющих условию $I(0) = I(1) = 0$. В частности, имеет место изопериметрическое неравенство (0.43).

Очевидно, если несколько функций I_1, I_2, ... , удовлетворяют неравенству вида (0.45), то ему удовлетворяет и супремум таких функций. Поэтому, можно говорить об оптимальной функции I в (0.45). Естественен вопрос, насколько универсальны неравенства (0.45) и (0.43), и в частности, выполняются ли они в классе других продакт-мер $\mathbf{P} = \mu_p^n$ на $\{0,1\}^n$. Оказывается, что в этом плане равномерное распределение играет особую роль, и мы не знаем, можно ли получить гауссовское изопериметрическое неравенство (0.44) на основе дискретных функциональных неравенств типа (0.45), если их рассматривать по отношению к другим продакт-мерам. Тем не менее, справедливо неравенство

$$\mathbf{P}^{+}(A) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\,\varphi(\Phi^{-1}(\mathbf{P}(A)). \tag{0.59}$$

Такие неравенства изучаются в § 3.3. Как оказывается, они имеют место не только для продакт-мер $\mathbf{P} = \mu_p^n$ на $\{0,1\}^n$, но – при надлежащем обобщении дискретного периметра (0.42) – и для продакт-мер возможно с разными маргинальными распределениями на произвольных декартовых произведениях. При этом, постоянная $\frac{1}{\sqrt{2}}$ не может быть улучшена в (0.59). Насколько точно это неравенство по отношению к продакт-мерам $\mathbf{P} = \mu_p^n$, показывает пример множеств

$$A_n(a) = \Big\{x \in \{0,1\}^n : \frac{x_1 + \cdots + x_n - np}{\sqrt{npq}} \leq a\Big\}, \quad a \in \mathbf{R}.$$

В этом случае, в силу центральной предельной теоремы, при $n \to \infty$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,\varphi(\Phi^{-1}(\mathbf{P}(A_n(a))) \to \frac{1}{\sqrt{2}}\,\varphi(a),$$

в то время как, в силу локальной предельной теоремы,

$$\mathbf{P}^{+}(A_n(a)) \to (\sqrt{p} + \sqrt{q}\,)\,\varphi(a)$$

(заметим, что $1 \leq \sqrt{p} + \sqrt{q} \leq \sqrt{2}\,$). Применяя (0.59) к продакт-мерам $\mathbf{P} = \mu_p^n$ с малыми p (отсюда и вытекает оптимальность константы $\frac{1}{\sqrt{2}}$), мы придем к аналогичному изопериметрическому неравенству для многомерного распределения Пуассона (§ 3.4).

В § 3.5 мы исследуем поведение констант K_p (как функции параметра p) в неравенстве Талаграна (0.40). Это также оказывается возможным на основе функциональной формы (0.45) с оператором M вместо дискретного градиента.

Параллельно (0.40), для продакт-мер $\mathbf{P} = \mu_p^n$ Талагран рассматривал в [216] также неравенства вида

$$\int_A \sqrt{h_A}\, d\mathbf{P} \geq c\,\mathbf{P}(A)(1 - \mathbf{P}(A)). \tag{0.60}$$

Им было установлено это неравенство с постоянной $c = c_p$ порядка $\sqrt{pq}$. Снова применяя (0.45) с функцией $I(t) = t(1-t)$, мы докажем (0.60) с постоянной $c = 1$ (как следствие, функцию $c(p, \mathbf{P}(A))$ в теореме Маргулиса можно выбрать не зависящей от параметра p). Более общо, в § 3.6 мы опишем все вероятностные распределения μ на $\mathbf{Z}$, такие что неравенство (0.60) выполняется для продакт-мер $\mathbf{P} = \mu^n$ с некоторой постоянной c не зависящей от размерности n. По аналогии с дискретным кубом, с каждым множеством $A \subset \mathbf{Z}^n$ мы связываем функцию

$$h_A(x) = card\{i \leq n : x \in A,\, (x + e_i \notin A \text{ или } x - e_i \notin A)\},$$

где $(e_i)_{i \leq n}$ – канонический базис в $\mathbf{R}^n$. При $n = 1$ (0.60) есть изопериметрическое неравенство на $\mathbf{Z}$ вида

$$\mu(\partial_+ A) \geq c\,\mu(A)\,(1 - \mu(A)), \tag{0.61}$$

где $\partial_+ A = \{h_A > 0\}$ – дискретная граница A "с внутренней стороны", причем для одноточечных множеств оно принимает вид

$$\mu(\{a\}) \geq c\,F(a)(1 - F(a)), \quad a \in \mathbf{Z}, \tag{0.62}$$

где $F(a) = \mu((-\infty, a])$ – функция распределения меры μ. Мы покажем, что с точностью до постоянных, зависящих только от μ, неравенства (0.60)–(0.62) эквивалентны друг другу. С точностью до постоянной неравенство (0.61) оказывается равносильным и дискретному неравенству типа Пуанкаре $c\,\mathrm{Var}(g) \leq \mathbf{E}|\Delta g|^2$ для оператора $\Delta g(x) = g(x+1) - g(x)$. Такие неравенства были недавно исследованы в одной работе Лу, где получена характеризация, несколько отличная от (0.62).

Наконец, отметим, что неравенство (0.45) для гауссовской меры γ_n с гауссовской изопериметрической функцией I может быть доказано и аналитически (без использования дискретрной версии). Это было показано в работе Бакри и Леду [62] (и затем в работе Леду [178]) на основе операторов Орнштейна–Уленбека.

В последней 4-й главе мы используем функциональную форму (0.45) для изучения т.н. изопериметрических констант $Is(\mu)$, введенных в 1970 г. Дж. А. Чигером [108] в контексте римановой геометрии:

$$Is(\mu) = \inf_{0<\mu(A)<1} \frac{\mu^+(A)}{\min\{\mu(A), 1-\mu(A)\}}\,.$$

Здесь μ – вероятностная мера на сепарабельном метрическом пространстве (M,ρ), $\mu^+(A)$ – периметр, определенный соотношением (0.42), и инфимум берется по всем измеримым $A \subset M$ меры $0 < \mu(A) < 1$. То есть, $c = Is(\mu)$ – оптимальная постоянная в изопериметрическом неравенстве ("непрерывном" аналоге (0.60))

$$\mu^+(A) \geq c\,\min\{\mu(A), 1-\mu(A)\}, \quad A \subset M. \tag{0.63}$$

Как было показано Чигером, это неравенство влечет неравенство типа Пуанкаре

$$\lambda_1 \operatorname{Var}(g) \leq \mathbf{E}|\nabla g|^2 \tag{0.64}$$

с постоянной $\lambda_1 = c^2/4$. Изопериметрические константы связаны и с рядом других неравенств типа Соболева. Например, эквивалентной функциональной формой для (0.63) служит неравенство

$$c\,\mathbf{E}|g - m(g)| \leq \mathbf{E}|\nabla g|,$$

где $m(g)$ – медиана g (в смысле меры μ), откуда следует близкое к нему (эквивалентное с точностью до абсолютного множителя) неравенство

$$\frac{c}{2}\,\mathbf{E}|g - \mathbf{E}g| \leq \mathbf{E}|\nabla g|. \tag{0.65}$$

Для гауссовской меры $\mu = \gamma_n$, как уже отмечалось, впервые неравенство вида (0.65) было установлено Пизье, причем без использования изопериметрической теоремы. Согласно теореме 0.1, (0.63) можно записать и в интегральной форме

$$\mu(A^h) \geq F_\nu(F_\nu^{-1}(\mu(A) + ch)), \quad h > 0, \tag{0.66}$$

где F_ν – функция распределения меры ν с плотностью $\frac{1}{2}e^{-|x|}$, $x \in \mathbf{R}$. В этом смысле ν обладает некоторым экстремальным свойством по отношению к (0.63). Более точно, если (0.63) записать в терминах изопериметрической функции как неравенство

$$I_\mu(t) \geq c \min\{t, 1-t\}, \quad t \in [0,1], \tag{0.67}$$

то можно обнаружить, что при $\mu = \nu$ это неравенство обращается в равенство с $c = 1$ (это означает, что множества $(-\infty, x]$ являются экстремальными в одномерной изопериметрической задаче для меры ν). Впервые это утверждение в форме (0.66) с $\mu = \nu$ было доказано Талаграном в [216].

Мы стоим перед интригующим вопросом: сохраняются ли неравенства (0.63) и (0.65)–(0.67) для продакт-мер $\mathbf{P} = \nu^n$ на $\mathbf{R}^n$ (с евклидовой метрикой) с некоторой постоянной c, не зависящей от размерности? Или, иначе, верно ли, что $\inf_n Is(\nu^n) > 0$? Как мы знаем, для меры $\mathbf{P}$ выполняется неравенство Талаграна (0.36), для больших h более сильное, чем (0.66) с $\mu = \mathbf{P}$, в то время, как при малых h (0.36) дает оценку (0.63) лишь с $c = c_n \to 0$ (при $n \to \infty$). Эта гипотеза оказывается справедливой, причем для всех вероятностных мер μ на (абстрактном) метрическом пространстве M, у которых $Is(\mu) > 0$.

В § 4.2 будет доказано следующее утверждение (основное в этой главе). Для множеств $A \subset M^n$ и функций g на M^n будем определять μ^n-периметр $(\mu^n)^+(A)$ и модуль градиента $|\nabla g|$ согласно определению (0.30) по отношению к метрике евклидового типа

$$dist(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \rho(x_i,y_i)^2}, \quad x,y \in M^n.$$

Будем предполагать, что для всех $n \geq 1$ и для всех липшицевых функций g на $(M^n, dist)$ для μ^n-почти всех $x \in M^n$

$$|\nabla g(x)|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\nabla_{x_i} g(x)|^2, \tag{0.68}$$

где $|\nabla_{x_i} g(x)|$ означает модуль градиента функции $x_i \to g(x)$ (значения x_j при $j \neq i$ фиксированы).

Теорема 0.6. Для всех $n \geq 1$

$$Is(\mu^n) \geq \frac{1}{2\sqrt{6}}\, Is(\mu).$$

Условие (0.68) всегда выполнено, например, для абсолютно-непрерывных мер μ на $M = \mathbf{R}^k$. § 4.3 мы исследуем более детально ситуацию на прямой $M = \mathbf{R}$: в этом случае неравенства (0.63), (0.66) и (0.67) эквивалентны тому, что неубывающее отображение T_μ, переводящее ν в μ, имеет липшицеву константу $\|T_\mu\|_{\mathrm{Lip}} = 1/c$, и это обстоятельство позволит нам полностью избавиться от условия (0.68).

Чтобы осуществить индукционный шаг при доказательстве теоремы 0.6, мы не можем использовать вышеупомянутые неравенства, поскольку входящая в них (оптимальная) константа c зависит от размерности n. Поэтому мы исследуем формально более сильное неравенство (0.45) с функцией $I(t) = t(1-t)$. Здесь нам потребуется установить усиленный вариант теоремы Чигера – неравенства типа Пуанкаре (0.64)–(0.65) для норм пространств Орлича $L_\Psi(M,\mu)$ (особую роль будет играть функция Юнга $\Psi(x) = \sqrt{1+|x|^2} - 1$). Соответствующие результаты приводятся в § 4.1. Как следствие, мы получим многомерное неравенство типа Пуанкаре по отношению к нормам Орлича

$$\|g - \mathbf{E}g\|_{L_\Psi(M^n,\mu^n)} \leq C\, \|\nabla g\|_{L_\Psi(M^n,\mu^n)} \tag{0.69}$$

с постоянной C, зависящей только от Ψ и изопериметрической константы $Is(\mu)$ (здесь g – произвольная функция на M^n, суммируемая по мере μ^n и имеющая конечную липшицеву константу на всех шарах в M^n). Для гауссовской меры $\mu^n = \gamma_n$ неравенство вида (0.69) было ранее получено Пизье на основе (0.14).

Во второй части главы в качестве основы мы рассматриваем уже не изопериметрические константы, а сами неравенства типа Пуанкаре (0.64), а также логарифмичские неравенства Соболева

$$\mathbf{E}g^2 \log g^2 - \mathbf{E}g^2 \log \mathbf{E}g^2 \leq 2c\,\mathbf{E}|\nabla g|^2. \tag{0.70}$$

Как и (0.45), эти неравенства распространяются с метрических вероятностных пространств (M, ρ, μ) на многомерные пространства $(M^n, dist, \mu^n)$, причем без потери в константах. Если ограничиться случаем $M = \mathbf{R}$, то согласно Б. Макенхаупту [193], вопрос о том, какие вероятностные меры на прямой подчиняются неравенству (0.64) с некоторым $\lambda_1 > 0$, был решен в конце 1960 гг. в работах Артолы, Таленти и Томаселли. Он имеет длинную и интересную историю, тесно связанную с некоторыми неравенствами Харди (некоторые известные результаты обсуждаются в § 4.3). В § 4.4 будут описаны все вероятностные распределения μ на прямой, удовлетворяющие (0.64) в классе всех выпуклых функций g (и не обязательно удовлетворяющие (0.64) в классе всех g). Это более слабое требование к μ мотивируется задачей об оценивании дисперсии максимума ограниченного случайного процесса, линейно порожденного независимыми величинами. Как результат, мы придем к классу распределений, обладающих свойством (0.58).

В § 4.5 рассматривается уже абстрактное метрическое вероятностное пространство (M, ρ, μ). Здесь изучается следующий вопрос: каково "наихудшее" поведение функции концентрации $\alpha(h) = 1 - R_{h,\mu^n}(1/2)$ в предположении, что выполнено неравенство (0.64)? Мы покажем, что справедливо неравенство

$$\alpha(h) \leq 18\, e^{-2\sqrt{\lambda_1}\, h}, \quad h > 0. \tag{0.71}$$

При $p = 1/2$ эта оценка уточняет неравенство Громова-Мильмана (0.29), а также некоторые другие результаты (мы обсудим различные подходы в том же § 4.5). Как показывает пример меры μ на $M = \mathbf{R}$ с плотностью $\sqrt{\lambda_1} e^{-2\sqrt{\lambda_1}\,|x|}$, неравенство (0.71) уже можно рассматривать с точностью до множителя как окончательное.

С точки зрения концентрации меры, логарифмические неравенства Соболева стали исследоваться недавно, хотя основная идея была выдвинута еще в середение 1970 гг. И. Хербстом и затем развита в работе Дэвиса и Саймона (1984 г., [122]). Идея состоит в применении неравенства (70) к функциям вида e^{tf} или $e^{t^2 f}$ и последующем анализе извлекаемого дифференциального неравенства. В частности, если $\|g\|_{\mathrm{Lip}} \leq 1$, то (0.70) влечет

$$\mathbf{E} e^{t\,(g - \mathbf{E} g)} \leq e^{ct^2/2}, \quad t \in \mathbf{R}. \tag{0.72}$$

Это неравенство было доказано М. Леду [176]. Родственное неравенство для моментов $e^{t^2 f}$ было ранее получено в работе С. Аиды, Т. Масуды и И. Шигекавы [54]. Таким образом, можно получить неравенство (0.11) для гауссовской меры $\mu = \gamma_n$ на основе неравенства Гросса (0.19). В § 4.6 будет показано, что из неравенства Гросса можно извлечь и неравенство Пизье (0.17), причем с лучшей постоянной в экспоненте. Мы получим некоторое обобщение (0.72) и, в частности, выведем из (0.70) неравенство

$$\mathbf{E} e^{g - \mathbf{E} g} \leq \mathbf{E} e^{c|\nabla g|^2}, \tag{0.73}$$

где g – произвольная функция на M, имеющая конечные липшицевы константы на всех шарах в M. Наконец, в § 4.7 будут описаны все вероятностные меры на прямой, удовлетворяющие логарифмичекому неравенству Соболева с некоторой постоянной $c < +\infty$.

Основные результаты настоящей работы получены автором в период 1993-1995 гг. Теоремы 0.1, 0.3, 0.4 и 0.5 могут быть найдены в работах [71], [72], [73], [74], теоремы 0.2 и 0.4 доказаны в совместных работах с К. Удрэ [78], [80]. Некоторые результаты 2-й части 4-й главы основаны на совместных работах с Ф. Гетце [76], [78] и М. Леду [83]. Более детальные ссылки сделаны в примечаниях, которые приводятся в конце каждой главы.

В каждой главе ведется отдельная нумерация для определений, теорем, лемм, замечаний и (некоторых) выносных формул. Например, теорема 3.2.1 означает: теорема 1 2-го параграфа 3-ей главы.

ГЛАВА I. ФОРМЫ ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

§ 1.1. Основные понятия. Интегральная и дифференциальная формы изопериметрических неравенств

Пусть M – топологическое пространство, снабженное борелевской вероятностной мерой μ, то есть вероятностной мерой, определенной на σ-алгебре измеримых по Борелю подмножеств M (в дальнейшем измеримость, в отличие от μ-измеримости, всегда означает измеримость по Борелю).

Предположим, что каждой точке $x \in M$ поставлена в соответствие некоторая открытая окрестность $U(x)$ этой точки. Тогда с каждым множеством $A \subset M$ можно связать окрестность

$$U(A) = \bigcup_{a \in A} U(a) \tag{1.1.1}$$

(в частности, $U(\varnothing) = \varnothing$, $U(M) = M$). Под изопериметрическими неравенствами часто понимают неравенства вида

$$\mu(U(A)) \geq R(\mu(A)). \tag{1.1.2}$$

Наилучшей в (1.1.2) является функция

$$R_\mu(p) = \inf_{\mu(A) \geq p} \mu(U(A)), \qquad 0 \leq p \leq 1, \tag{1.1.3}$$

где инфимум берется по всем A меры $\mu(A) \geq p$ из того класса подмножеств M, для которого рассматривается (1.1.2). Как правило, таким классом служит класс всех измеримых подмножеств M, и мы это будем всегда предполагать, если не оговорено противное. Нахождение R_μ или экстремальных множеств в (1.1.3) представляет собой весьма абстрактную формулировку изопериметрическй задачи для меры μ.

Обычно окрестность $U(A)$ строится с помощью какой-нибудь метрики (или псевдо-метрики) ρ в M: в качестве $U(x)$ берется открытый шар $D(x,h)$ с центром в x и радиусом $h>0$. Тогда $U(A)=A^h$ – h-окрестность множества A, и

$$R_{h,\mu}(p)=R_{h,\mu,\rho}(p)=\inf_{\mu(A)\ge p}\mu(A^h),\quad 0\le p\le 1,\ h>0, \tag{1.1.4}$$

зависит также от h. В этом случае задача (1.1.3) для класса всех измеримых подмножеств M может быть также сформулирована как задача о вероятностях отклонений липшицевых функций g на M от своих квантилей $m_p=m_p(g)$, $0<p<1$. Действительно, пусть $|g(x)-g(y)|\le\rho(x,y)$ для всех $x,y\in M$. Для множеств вида $A=\{g\le m_p\}$ имеем $A^h\subset\{g<m_p+h\}$. Следовательно для всех $p\in(0,1)$ и $h>0$

$$\mu\{g-m_p\ge h\}\le 1-R_{h,\mu}(p), \tag{1.1.5}$$

$$\mu\{g-m_p\le -h\}\le 1-R_{h,\mu}(p). \tag{1.1.6}$$

В обоих неравенствах оценка $1-R_{h,\mu}(p)$ не может быть улучшена, так как (1.1.5) и (1.1.6) эквивалентны, а на функциях вида $g(x)=\rho(A,x)=\inf\{\rho(a,x):a\in A\}$ (1.1.5) превращаются в (1.1.2) с $R=R_\mu$. Отметим, что в случае, когда $R_{h,\mu}(p)>p$ при всех $p\in(0,1)$ и $h>0$, квантили липшицевых функций определяются однозначно.

Конечно, наиболее интересным примером служит евклидово пространство $M=\mathbf{R}^n$ с ℓ^p-метрикой

$$\rho_p(x,y)=\left(\sum_{i=1}^n|x_i-y_i|^p\right)^{1/p},$$

$x=(x_1,\cdots,x_n)$, $y=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n$, $1\le p\le+\infty$. При $p=2$, ρ_2 – обычное евклидово расстояние; при $p=+\infty$, ρ_∞ – равномерное расстояние $\rho_\infty(x,y) = \sup_{1\le i\le n} |x_i - y_i|$. Аналогично определяются псевдо-метрики ρ_p в бесконечномерном пространстве $M = \mathbf{R}^\infty$.

Более общо, можно рассматривать в $\mathbf{R}^n$ окрестности множеств вида $U(A) = A + W$, соответствующие окрестностям точек $U(a) = a + W$, где W – некоторая окрестность нуля. Важным примером служит смесь $W = h_1 B_1 + h_2 B_2$ единичных ℓ^1- и ℓ^2-шаров. Интересно, что если мы возьмем куб $W = (-\infty, h)^n$, то по отношению к метрике ρ_∞ изопериметрическая задача в классе всех измеримых множеств будет равносильна изопериметрической задаче в классе всех монотонных множеств (то есть таких A, что $x_i \le y_i$ для всех $i \le n$, $y \in A$ влечет $x \in A$).

Пусть (M, ρ, μ) – метрическое пространство с вероятностной мерой. Кроме неравенств вида

$$\mu(A^h) \ge R(\mu(A)) \tag{1.1.7}$$

для метрических пространств имеется еще один способ задания изопериметрических неравенств, связанный с понятием периметра. Величина

$$\mu^+(A) = \liminf_{h\to 0^+} \frac{\mu(A^h) - \mu(A)}{h}$$

называется μ-периметром множества $A \subset M$ (точнее, внешним μ-периметром по Минковскому). Неравенства

$$\mu^+(A) \ge I(\mu(A)), \tag{1.1.8}$$

связывающие "периметр" и "объем", будем называть изопериметрическими неравенствами в дифференциальной форме (или просто дифференциальными изопериметрическими неравенствами) – в отличие от неравенств вида (1.1.7), которые будем называть изопериметрическими неравенствами в интегральной форме (или интегральными изопериметрическими неравенствами). Если (1.1.7) и (1.1.8) записаны с оптимальными функциями R и

I, то эти неравенства будем называть точными изопериметрическими неравенствами. Так же как и в (1.1.7), оптимальной в (1.1.8) является функция

$$I_\mu(p) = I_{\mu,\rho}(p) = \inf_{\mu(A)=p} \mu^+(A) \tag{1.1.9}$$

(инфимум берется по всем измеримым A меры $\mu(A) = p$), которая, в отличие от R_μ, определена на множестве значений меры μ. Будем называть ее, также как и функцию R_μ, изопериметрической функцией меры μ (указывая, если необходимо, о какого рода неравенствах идет речь). Если мера μ не имеет атомов, то I_μ определена на всем интервале $0 \le p \le 1$. В любом случае $I_\mu(0) = I_\mu(1) = 0$; $R_{h,\mu}(0) = 0$, $R_{h,\mu}(1) = 1$.

Замыкание и границу множества A будем обозначать, соответственно, $\overline{A}$ и ∂A. Очевидно, если $\mu(\overline{A}) > \mu(A)$, то $\mu^+(A) = +\infty$. Если же $\mu(\overline{A}) = \mu(A)$, то $\mu^+(\overline{A}) = \mu^+(A)$. Поэтому неравенство (1.1.8) можно рассматривать только на замкнутых множествах, и такие же множества достаточно рассматривать в определении (1.1.9).

Мы подошли к естественному вопросу: эквивалентны ли неравенства (1.1.7) и (1.1.8)? Или, точнее, при каких соотношениях между R и I эти неравенства эквивалентны? Очевидно,

$$I_\mu(p) = \liminf_{h \to 0^+} \frac{R_{h,\mu}(p) - p}{h},$$

то есть, решив изопериметрическую задачу в "интегральной" форме, мы получаем и решение изопериметрической задачи в "дифференциальной" форме. Можно ли восстановить R_μ через I_μ? В общем случае, конечно, нет: если мы рассмотрим изопериметрическую задачу в метрике $\rho_u = u(\rho)$, где u – неотрицательная возрастающая вогнутая функция на $[0, +\infty)$, такая что $u(h)/h \to 1$ при $h \to 0^+$, то $I_{\mu,\rho_u} = I_{\mu,\rho}$ не изменится, в то время как $R_{h,\mu,\rho_u} = R_{u^{-1}(h),\mu,\rho}$ существенно зависит от u (u^{-1} – функция, обратная к u).

Следующий пример показывает, что даже для "канонических" метрик возможно $I_\mu = I_\nu$, но $R_{h,\mu} \neq R_{h,\nu}$. Пусть $M = \mathbf{R}$ с обычной метрикой ρ, μ – двустороннее показательное распределение с плотностью $\frac{1}{2}\,e^{-|x|}$, а ν – (одностороннее) показательное распределение с плотностью e^{-x}, $x > 0$. Экстремальными для меры μ и ν в (1.1.4) (см. теорему 1.2.1) являются интервалы вида $(-\infty, u]$ и $[v, +\infty)$ (причем, в силу симметрии, для меры μ можно рассматривать интервалы только первого вида), откуда прямым вычислением находим, что

$$I_\mu(p) = I_\nu(p) = \min\bigl\{\,p,\, 1-p\,\bigr\},$$

$$R_{h,\mu}(p) = \begin{cases} p/\alpha, & \text{при} \quad p \le \alpha/2, \\ 1 - \alpha/(4p), & \text{при} \quad \alpha/2 \le p \le 1/2, \\ 1 - \alpha(1-p), & \text{при} \quad p \ge 1/2, \end{cases}$$

$$R_{h,\nu}(p) = \begin{cases} p/\alpha, & \text{при} \quad p \le \alpha/2, \\ 1 - \alpha(1-p), & \text{при} \quad p \ge \alpha/2. \end{cases}$$

где $\alpha = \exp(-h)$. Следовательно $R_{h,\mu}(p) \le R_{h,\nu}(p)$, причем неравенство – строгое при $\alpha/2 < p < 1/2$.

Тем не менее, в довольно общей ситуации можно дать ответ на вопрос о том, существует и, если да, то какова минимально возможная изопериметрическая функция R некоторой меры в интегральной изопериметрической задаче (1.1.4) при заданной функции I в соответствующей дифференциальной изопериметрической задаче (1.1.9).

Пусть I – положительная непрерывная функциия, определенная на интервале $(0,1)$. Положим

$$a_I = -\int_0^{1/2} \frac{dp}{I(p)}\,, \qquad b_I = \int_{1/2}^0 \frac{dp}{I(p)}\,.$$

В общем случае $-\infty \le a_I < 0 < b_I \le +\infty$. С функцией I свяжем функцию распределения F, однозначо определяемую следующими свойствами:

(i) $F(a_I^+) = 0$, $F(0) = 1/2$, $F(b_I^-) = 1$;

(ii) F имеет положительную непрерывную производную f на интервале (a_I, b_I), причем для всех $p \in (0,1)$ $f(F^{-1}(p)) = I(p)$.

Здесь $F^{-1} : (0.1) \to (a_I, b_I)$ – функция, обратная к F, суженной на (a_I, b_I). Заметим, что

$$F^{-1}(p) = \int_{1/2}^{p} \frac{dt}{I(t)}, \qquad 0 < p < 1. \tag{1.1.10}$$

Будем говорить, что функция распределения F ассоциирована с I. Имеет место:

Теорема 1.1.1. Следующее утверждения эквивалентны:

$a)$ для всех $h > 0$ и всех измеримых множеств $A \subset M$, таких что $0 < \mu(A) < 1$,

$$\mu(A^h) \ge F\big(F^{-1}\big(\mu(A)\big) + h\big);$$

$b)$ для всех измеримых $A \subset M$, таких что $0 < \mu(A) < 1$,

$$\mu^+(A) \ge I\big(\mu(A)\big);$$

$c)$ неравенство в $b)$ выполняется для всех множеств $A \subset M$ меры $0 < \mu(A) < 1$, представимых в виде объединения конечного числа открытых шаров (при дополнительном предположении, что M – сепарабельно, и открытые h-окрестности шаров в M суть снова шары).

Иначе говоря, эквивалентны неравенства

$$R_{h,\mu}(p) \ge F\big(F^{-1}(p) + h\big) \qquad \text{и} \qquad I_\mu(p) \ge I(p). \tag{1.1.11}$$

Примеры. Неравенства

$$I_\mu(p) \geq cp(1-p), \qquad I_\mu(p) \geq c\left(p(1-p)\right)^{1/2},$$

где c – фиксированный положительный параметр, а $p \in (0,1)$ – произвольно, соответственно эквивалентны неравенствам

$$R_{h,\mu}(p) \geq \frac{p}{p+(1-p)\exp(-ch)}, \qquad h > 0,$$

$$R_{h,\mu}(p) \geq \frac{1}{2}\left(1-\cos(ch)\right) + p\cos(ch) + \left(p(1-p)\right)^{1/2}\sin(ch)$$

при $0 < ch \leq \pi/2 - \arcsin(2p-1)$ (и $R_{h,\mu}(p) = 1$ при больших значениях h). Эти неравенства превращаются в равенства соответственно для меры на $\mathbf{R}$ с функцией распределения $\frac{1}{1+\exp(-cx)}$, $x \in \mathbf{R}$ (это – так называемое логистическое распределение) и для равномерного распределения на двумерной сфере в $\mathbf{R}^3$ радиуса c.

Другой пример: M – интервал на прямой длины c или окружность на плоскости длины $c/2$ с равномерный распределением μ. В этом случае $I_\mu(p) = c$, $R_{h,\mu}(p) = \min\{1, p+ch\}$ для всех $p \in (0,1)$, $h > 0$.

Эквивалентность b) и c) показывает, что условия на множества A типа гладкости не существенны в изопериметрических неравенствах. В дальнейшем это свойство будет использовано в изопериметрической задаче на прямой – уже в этом простейшем случае можно получить широкий набор возможных изопериметрических функций, для которых неравенства в (1.1.11) превращаются в равенства (см. теорему 1.2.2).

Свойства a) и b) можно сформулировать и в терминах липшицевых функций. Пусть ζ – случайный элемент в M, имеющий распределение μ, и пусть ζ^* – случайная величина с функцией распределения F, ассоциированной с I.

Теорема 1.1.2. Свойства a), b) эквивалентны следующему утверждению. Для любой липшицевой функции g на M ($\|g\|_{Lip} \le 1$) существует липшицевая функция g^* на прямой $\mathbf{R}$, такая что случайные величины $g(\zeta)$ и $g^*(\zeta^*)$ одинаково распределены.

Доказательство теоремы 1.1.1. Доказательтво эквивалентности $a) \Longleftrightarrow b)$ не отличается от доказательства эквивалентности $a) \Longleftrightarrow c)$, поэтому ограничимся последним. Очевидно, устремляя $h \to 0^+$ в неравенстве a), получаем c). Чтобы вывести a) из c), положим $R_h(p) = F(F^{-1}(p) + h)$ при $h > 0$, $0 < p < 1$, и $R_h(1) = 1$ (по непрерывности). Тогда R_h образует семейство (полугруппу) неубывающих непрерывных функций на $(0, 1]$ со следующим свойством: для всех $h, h' > 0$ и всех $p \in (0, 1]$

$$R_{h+h'}(p) = R_h(R_{h'}(p)). \tag{1.1.12}$$

Нам нужно показать, что для всех подмножеств $A \subset M$ меры $0 < \mu(A) < 1$,

$$\mu(A^h) \ge R_h(\mu(A)). \tag{1.1.13}$$

Немного модифицируем (1.1.13): введем параметр $\sigma > 1$ и определим семейство

$$R_h^\sigma(p) = R_{h/\sigma}(p), \qquad h > 0, \quad 0 < p < 1.$$

Как и при $\sigma = 1$, это семейство удовлетворяет (1.1.12). Сначала покажем, что для множеств $A \subset M$ меры $0 < \mu(A) < 1$, представимых в виде объединения конечного числа открытых шаров в M,

$$\mu(A^h) \ge R_h^\sigma(\mu(A)), \qquad \sigma > 1. \tag{1.1.14}$$

Полагая в (1.1.14) $\sigma \to 1$, мы бы получили (1.1.13) для всех таких множеств. Итак, зафиксируем множество A и определим

$$\Delta = \Big\{ h > 0 : (1.1.14) \text{ выполняется для всех } h' \in (0, h] \Big\}.$$

Так как функция $h \to R_h^\sigma(\mu(A))$ непрерывна на $(0, +\infty)$, а функция $h \to \mu(A^h)$ непрерывна на $(0, +\infty)$ слева, чтобы доказать, что $\Delta = (0, +\infty)$, достаточно проверить, что

i) $\varepsilon \in \Delta$, для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$;

ii) если $h \in \Delta$, то $h + \varepsilon \in \Delta$, для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

По определению μ^+, при $\varepsilon \to 0^+$

$$\mu(A^\varepsilon) \geq \mu(A) + \mu^+(A)\varepsilon + \mathrm{o}(\varepsilon). \tag{1.1.15}$$

С другой стороны, так как $R_\varepsilon^\sigma(p) = p + f(F^{-1}(p))\,\dfrac{\varepsilon}{\sigma} + \mathrm{o}(\varepsilon)$,

$$R_\varepsilon^\sigma(\mu(A)) = \mu(A) + I(\mu(A))\,\frac{\varepsilon}{\sigma} + \mathrm{o}(\varepsilon). \tag{1.1.16}$$

По условию $\mu^+(A) \geq I(\mu(A))$, следовательно, сравнивая (1.1.15) и (1.1.16), приходим к свойству *i*).

Допустим теперь, что $h \in \Delta$. Если $\mu(A^h) > R_h^\sigma(\mu(A))$, то это неравенство сохранится и для $h + \varepsilon$ с достаточно малым $\varepsilon > 0$ (так как функция $h \to \mu(A^h)$ не убывает, а функция $h \to R_h^\sigma(\mu(A))$ непрерывна). Если же $\mu(A^h) = R_h^\sigma(\mu(A))$, введем множество $B = A^h$, так что по неравенству треугольника $B^\varepsilon \subset A^{h+\varepsilon}$, и поэтому $\mu(B^\varepsilon) \leq \mu(A^{h+\varepsilon})$ для всех $\varepsilon > 0$. Если $\mu(B^\varepsilon) = 1$, то $h + \varepsilon \in \Delta$ автоматически. Предположим, что $\mu(B^{\varepsilon'}) < 1$ для некоторого $\varepsilon' > 0$ и пусть $\varepsilon \in (0, \varepsilon')$. В частности, $0 < \mu(B) < 1$. Так как по условию A представимо в виде объединения конечного числа открытых шаров, $A = D_1 \cup \cdots \cup D_n$, то и $A^h = D_1^h \cup \cdots \cup D_n^h$ обладает этим же свойством. Поэтому $\mu^+(B) \geq I(\mu(B))$ и можно записать неравенства (1.1.15) и (1.1.16) для B:

$$\mu(B^\varepsilon) \geq \mu(B) + \mu^+(B)\,\varepsilon + \mathrm{o}(\varepsilon),$$

$$R_\varepsilon^\sigma(\mu(B)) = \mu(B) + I(\mu(B))\,\frac{\varepsilon}{\sigma} + \mathrm{o}(\varepsilon).$$

Следовательно $\mu(B^\varepsilon) \geq R_\varepsilon^\sigma(\mu(B))$ для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$. Остается заметить, что

$$\begin{aligned} R_{h+\varepsilon}^\sigma(\mu(A)) &= R_\varepsilon^\sigma(R_h^\sigma(\mu(A))) = R_\varepsilon^\sigma(\mu(A^h)) \\ &= R_\varepsilon^\sigma(\mu(B)) \leq \mu(B^\varepsilon) \leq \mu(A^{h+\varepsilon}). \end{aligned}$$

Таким образом, свойство ii) проверено.

Теперь легко распространить (1.1.13) на произвольные борелевские множества A меры $0 < \mu(A) < 1$. Если $A \subset M$ открыто, то в силу сепарабельности, для некоторой последовательности открытых шаров $D_i \subset A$ $(i \geq 1)$, $\mu(A_n) \to \mu(A)$ при $n \to \infty$, где $A_n = D_1 \cup \dots \cup D_n$. Так как (1.1.13) справедливо для всех A_n, то оно верно и для A. Пусть $K \subset M$ замкнуто. Множество K^ε открыто, поэтому $\mu(K^{h+\varepsilon}) \geq \mu((K^\varepsilon)^h) \geq R_h(\mu(K^\varepsilon))$. Устремляя $\varepsilon \to 0^+$, и так как $\bigcap_{\varepsilon>0} A^\varepsilon = \overline{A}$, получаем $\mu\left(\overline{K^h}\right) \geq R_h(\mu(K))$ для всех $h > 0$. Но при $0 < h' < h$ $\overline{K^{h'}} \subset K^h$, и следовательно $\mu(K^h) \geq \mu\left(\overline{K^{h'}}\right) \geq R_{h'}(\mu(K))$. Устремляя $h' \to h$, получаем $\mu(K^h) \geq R_h(\mu(K))$. Наконец, для произвольного измеримого множества A найдется последовательность замкнутых множеств $K_n \subset A$, таких что $\mu(K_n) \to \mu(A)$ при $n \to \infty$. Для всех $h > 0$ имеем:

$$\mu(A^h) \geq \mu(K_n^h) \geq R_h(\mu(K_n)) \to R_h(\mu(A))$$

при $n \to \infty$. Теорема 1.1.1 доказана.

Утверждение теоремы 1.1.2 вытекает с учетом (1.1.5) из следующей элементарной леммы с $\xi = g(\zeta)$, которую мы приводим без доказательства (m_p обозначает минимальную, а в приложении к теореме 2.1.2 – однозначно определенную квантиль порядка p).

Лемма 1.1.1. Пусть ξ и ζ^* – случайные величины. Неравенство

$$\mathbf{P}\{\xi \leq m_p(\xi) + h\} \geq \mathbf{P}\{\zeta^* \leq m_p(\zeta^*) + h\} \tag{1.1.17}$$

выполняется для всех $p \in (0,1)$ и $h > 0$ тогда и только тогда, когда для некоторой липшицевой функции $g^* : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $(\|g^*\|_{Lip} \leq 1)$ случайные величины ξ и $g^*(\zeta^*)$ одинаково распределены.

§ 1.2. Изопериметрическая задача на прямой

Остановимся на простейшей изопериметрической задаче, когда $M = \mathbf{R}$ – вещественная прямая с обычным евклидовым расстоянием $\rho(x,y) = |x-y|$. В этом случае h-окрестность любого непустого множества $A \subset \mathbf{R}$ может быть записана как сумма (по Минковскому) $A^h = A + (-h,h)$, $h > 0$.

Пусть μ – вероятностная мера на $\mathbf{R}$ с функцией распределения $F(x) = \mu((-\infty, x])$, $x \in \mathbf{R}$. Будем предполагать, что μ сосредоточена на некотором интервале (a_μ, b_μ) (конечном или бесконечном), на котором μ имеет положительную непрерывную плотность f. При этом будем называть меру μ логарифмически вогнутой, если функция $\log f$ вогнута на (a_μ, b_μ). Для таких распределений изопериметрическая задача имеет простое решение.

Теорема 1.2.1. Если мера μ логарифмически вогнута, то для всех $p \in (0,1)$ и $h > 0$, величина $\mu(A^h)$ и, как следствие, величина $\mu^+(A)$ принимает наименьшее значение в классе всех подмножеств $\mathbf{R}$ меры $\mu(A) = p$ на интервалах вида $A = (-\infty, u]$ или $A = [v, +\infty)$.

Обозначим через $F^{-1} : (a_\mu, b_\mu) \to (0,1)$ функцию, обратную к F, суженной на (a_μ, b_μ). Тогда теорему 1.2.1 можно записать как утверждение об изопериметрической функции меры μ:

$$R_{h,\mu}(p) = \min\big\{ F(F^{-1}(p) + h), 1 - F(F^{-1}(1-p) - h) \big\}. \qquad (1.2.1)$$

Как следствие,

$$I_\mu(p) = \min\big\{ f(F^{-1}(p)), f(F^{-1}(1-p)) \big\}. \qquad (1.2.2)$$

Если μ симметрична относительно своей медианы, то в качестве экстремальных можно рассматривать только интервалы вида $A = (-\infty, u]$, и формулы (1.2.1)–(1.2.2) упрощаются:

$$R_{h,\mu}(p) = F(F^{-1}(p) + h), \qquad I_\mu(p) = f(F^{-1}(p)). \tag{1.2.3}$$

Легко видеть, используя, например, соотношение (1.1.10), что с точностью до сдвига меры отображение $\mu \to I = f(F^{-1})$ является взаимно-однозначным соответствием между классом рассматриваемых распределений μ и классом всех положительных непрерывных функций I на $(0,1)$, причем логарифмическая вогнутость меры μ равносильна вогнутости I, а симметричность μ относительно своей медианы – симметричности I относительно точки $1/2$ (то есть, свойству $I(1-p) = I(p)$ для всех $p \in (0,1)$). Таким образом, симметричные (относительно нуля) логарифмических вогнутые меры на прямой можно задавать своими изопериметрическими функциями, которые могут быть произвольными вогнутыми положительными функциями на $(0,1)$, симметричными относительно точки $1/2$. Например, функции $I(p) = p(1-p)$ соответствует логистическое распределение, а функции $I(p) = \min\{p, 1-p\}$ – двустороннее показательное.

В действительности, оба соотношения в (1.2.3), выражающие экстремальное свойство полуосей $A = (-\infty, u]$ в изопериметрической задаче для меры μ (соответственно в интегральной и дифференциальной форме) выполняются для более широкого класса рассматриваемых распределений, чем класс всех симметричных логарифмически вогнутых мер. Оказывается, этот класс можно легко описать.

Будем говорить, что функция I, определенная на $(0,1)$, субаддитивна, если $I(p+q) \le I(p) + I(q)$ для всех $p, q \in (0,1)$, таких что $p + q < 1$. Именно, имеет место:

Теорема 1.2.2. Следующее утверждения эквивалентны:

a) $R_{h,\mu}(p) = F(F^{-1}(p) + h)$ для всех $p \in (0,1)$ и $h > 0$;

$b)$ $I_\mu(p) = f(F^{-1}(p))$ для всех $p \in (0,1)$;

$c)$ функция $I(p) = f(F^{-1}(p))$, $0 < p < 1$, симметрична относительно точки $1/2$ и субаддитивна.

Интервал $A = (-\infty, F^{-1}(p)]$ имеет μ-меру p, поэтому в классе рассматриваемых мер всегда

$$R_{h,\mu}(p) \leq F(F^{-1}(p) + h) = \mu\big((-\infty, F^{-1}(p)]^h\big)\,,$$
$$I_\mu(p) \leq f(F^{-1}(p)) = \mu^+\big((-\infty, F^{-1}(p)]\big)\,.$$

Таким образом, экстремальность полуосей $(-\infty, x]$ в "интегральной" изопериметрической задаче равносильна их экстремальности в "дифференциальной" изопериметрической задаче.

Следствие 1.2.1. Если в изопериметрической задаче для меры μ экстремальными являются интервалы вида $(-\infty, x]$, то μ симметрична (относительно своей медианы) и имеет конечный экспоненциальный момент: $\int \exp(\varepsilon|x|)\, d\mu(x) < +\infty$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$.

Легко показать, что это утверждение остается в силе без каких-либо предположений типа существования плотности, если свойство экстремальности относится к изопериметрическим неравенствам в интегральной форме (см. замечание 1.2.1). Заметим также, что теорема 1.2.1 является частным случаем теоремы 1.2.2, но только в предположении симметричности меры μ.

Приступим к доказательствам. Начнем с (более простого) доказательства теоремы 1.2.2.

Доказательство теоремы 1.2.2.

Условия $a)$ и $b)$ эквивалентны в силу теоремы 1.1.1 и согласно замечанию о том, что $R_{h,\mu}(p) \leq F(F^{-1}(p) + h)$, $I_\mu(p) \leq f(F^{-1}(p))$.

$b) \Rightarrow c)$: по условию, для любого (измеримого) множества $B \subset \mathbf{R}$ меры $0 < \mu(B) < 1$,

$$\mu^+(B) \geq \mu^+(A) = I(\mu(A)),$$

где $A = (-\infty, x]$ имеет такую же меру, что и B. Пусть $p \in (0,1)$, $x = F^{-1}(p)$, $B = [x, +\infty)$. Так как $\mu(B) = 1-p$, то $\mu^+(B) \geq I(1-p)$. Но $\mu^+(B) = f(x) = I(p)$, следовательно $I(p) \geq I(1-p)$, для всех $p \in (0,1)$. Заменяя p на $1-p$, получаем обратное неравенство, и значит $I(p) = I(1-p)$ для всех $p \in (0,1)$.

Для доказательства субаддитивности возьмем интервал $B = [x, y] \subset (a_\mu, b_\mu)$, причем $x = F^{-1}(p)$, $y = F^{-1}(1-q)$, где $p, q \in (0,1)$, $0 < p+q < 1$. Так как $\mu(B) = 1-q-p$, то $\mu^+(B) \geq I(1-q-p)$. Но $\mu^+(B) = f(x) + f(y) = I(p) + I(1-q)$, следовательно $I(p) + I(1-q) \geq I(1-q-p)$. Учитывая доказанную симметричность функции I, получаем $I(p) + I(q) \geq I(p+q)$.

c) $\Rightarrow$ *b*): по теореме 1.1.1, достаточно проверить неравенство $\mu^+(A) \geq I(p)$ для множеств A меры p, представимых в виде объединения конечного числа открытых интервалов $\Delta_i = (a_i, b_i)$, $1 \leq i \leq n$. Можно считать, что эти интервалы не пересекаются и, более того, что нет совпадающих концов (так как при их склеивании μ-мера и μ-периметр множества не изменятся). Пусть сначала $n = 1$, $\mu(\Delta_1) = p$. Если $a_1 \leq a_\mu$ или $b_1 \geq b_\mu$, то доказывать нечего. Если $a_\mu < a_1 < b_1 < b_\mu$, то положим $p_1 = \mu((-\infty, a_1])$, $q_1 = \mu((-\infty, b_1])$, так что $0 < p_1 < q_1 < 1$, $q_1 - p_1 = p$. В силу симметричности и субаддитивности I,

$$\begin{aligned}\mu^+(\Delta_1) = f(a_1) + f(b_1) = I(p_1) + I(q_1) = I(p_1) + I(1-q_1)\\ \geq I(p_1 + (1-q_1)) = I(q_1 - p_1) = I(p).\end{aligned}$$

В общем случае, когда $n > 1$, положим $p_i = \mu(\Delta_i)$. Так как свойство субаддитивности распространяется на любое конечное число слагаемых, имеем:

$$\mu^+(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu^+(\Delta_i) \geq \sum_{i=1}^{n} I(p_i) \geq I(p).$$

Теорема 1.2.2 доказана.

Доказательство теоремы 1.2.1. Положим

$$R_h(p) = \min\big\{\, F(F^{-1}(p)+h), 1 - F(F^{-1}(1-p)-h)\,\big\}.$$

Требуется доказать, что для любых (измеримых) множеств A, таких что $0 < \mu(A) < 1$,

$$\mu(A^h) \geq R_h(\mu(A)), \quad h > 0. \tag{1.2.4}$$

Сначала сделаем некоторые упрощения. Во-первых, можно считать, что

(i) $a = -\infty$, $b = +\infty$, то есть, μ имеет положительную непрерывную плотность f на всей вещественной прямой $\mathbf{R}$ и, более того, что

(ii) производная функции $\log(f)$ существует всюду и представляет собой непрерывную убывающую функцию.

Действительно, функция $u = -\log(f)$ выпукла на (a,b), поэтому существует последовательность u_n дифференцируемых выпуклых функций на $\mathbf{R}$, таких что

1) производная u_n – непрерывная возрастающая функция;

2) u_n сходится поточечно к u на (a,b) и к $+\infty$ на $\mathbf{R} \setminus [a,b]$;

3) $f_n = \exp(-u_n)$ является плотностью некоторой вероятностной меры μ_n.

Тогда меры μ_n логарифмически вогнуты, удовлетворяют свойствам (i) – (ii), и, кроме того, $\mu_n(A) \to \mu(A)$, для всех (борелевских) множеств A. В частности, $F_n(x) \to F(x)$ для всех $x \in \mathbf{R}$, и $F_n^{-1}(p_n) \to F^{-1}(p)$, как только $p_n \to p \in (0,1)$, где F_n – функции распределения μ_n, а F_n^{-1} – обратные к F_n. Если бы (1.2.4) было доказано для μ_n, то есть,

$$\mu_n(A^h) \geq \min\big\{\, F_n(F_n^{-1}(\mu_n(A)) + h), 1 - F_n(F_n^{-1}(1-\mu_n(A)) - h)\,\big\},$$

то осуществляя предельный переход, мы бы получили (1.2.4) для меры μ.

Итак, предположим, что свойства $(i)-(ii)$ выполняются. Используя непрерывность функции $R_h(p)$ по паре аргументов (p,h), легко свести (1.2.4) к рассмотрению множеств A, представимых в виде объединения конечного числа непересекающихся замкнутых интервалов. Для удобства будем рассматривать расширенную прямую $[-\infty,+\infty]$. В дальнейшем будет удобнее иметь дело с замкнутыми h-окрестностями $A+[-h,h]$, которые также обозначим через A^h (очевидно, это не меняет задачу). Зафиксируем $p\in(0,1)$ и $h>0$.

В качестве первого шага исследуем ситуацию, когда A состоит только из одного интервала – здесь нам потребуется более сильное утверждение, чем (1.2.4).

Обозначим через $A_p(a)$ интервал $[a,b]\subset[-\infty,+\infty]$ μ-меры p, $-\infty\le a<b\le+\infty$. Переменная a может меняться в интервале $[-\infty,F^{-1}(1-p)]$, а $b=b(a)$ будем рассматривать как функцию от a, определяемую равенством

$$F(b)-F(a)=p. \tag{1.2.5}$$

Заметим, что множество $B_p(a)=(-\infty,a]\cup[b,+\infty)$, где $b=b(a)$, имеет μ-меру $1-p$.

Лемма 1.2.1. Существует $a_0=a_0(p,h)\in[-\infty,F^{-1}(1-p)]$, такое что функция $a\to\mu(A_p(a)^h)$ возрастает на интервале $[-\infty,a_0]$ и убывает на интервале $[a_0,F^{-1}(1-p)]$. То же самое справедливо и для функции $a\to\mu(B_p(a)^h)$ с некоторым a_0'.

Доказательство. Очевидно, что функция b возрастает,

$$b(-\infty)=F^{-1}(p),\quad b(F^{-1}(1-p))=+\infty.$$

Дифференцирование (1.2.5) дает $f(b)b'-f(a)=0$. Дифференцируя функцию $\varphi(a)=\mu(A_p(a)^h)=F(b+h)-F(a-h)$, мы получим

$$\begin{aligned}\varphi'(a)&=f(b+h)b'-f(a-h)=f(b+h)\,\frac{f(a)}{f(b)}-f(a-h)\\&=f(a)\left[\,\frac{f(b+h)}{f(b)}-\frac{f(a-h)}{f(a)}\,\right].\end{aligned}$$

Приращения $u(x+h)-u(x)$ строго выпуклой функции $u(x) = -\log f(x)$ представляют возрастающую функцию $x \in \mathbf{R}$. Поэтому, функция $U(a) = f(a-h)/f(a)$ возрастает, а функция $V(a) = f(b+h)/f(b)$ убывает. Таким, образом, функция

$$\frac{\varphi'(a)}{f(a)} = V(a) - U(a)$$

непрерывна и убывает на $(-\infty, F^{-1}(1-p))$. Следовательно возможен только один из трех случаев:

$a)$ существует точка $a_0 \in (-\infty, F^{-1}(1-p))$, такая что $\varphi' > 0$ на $(-\infty, a_0)$ и $\varphi' > 0$ он $(a_0, F^{-1}(1-p))$;

$b)$ $\varphi' < 0$ на $(-\infty, F^{-1}(1-p))$;

$c)$ $\varphi' > 0$ на $(-\infty, F^{-1}(1-p))$.

В случае $a)$ первое утверждение леммы 1.2.1 выполняется с $a_0 \in (-\infty, F^{-1}(1-p))$. В случаях $b)$ и $c)$ оно также выполняется с $a_0 = F^{-1}(1-p)$ и $a_0 = -\infty$, соответственно.

Доказательство второго утверждения леммы 1.2.1 не отличается от доказательства первого, так как при $b - a \geq 2h$

$$1 - \mu(B_p(a)^h) = F(b-h) - F(a+h),$$

и можно использовать точно такой же анализ.

Перейдем теперь ко второму шагу: предположим, что множество A μ-меры p представляет собой объединение конечного числа непересекающихся замкнутых интервалов $\Delta_i = [a_i, b_i]$, $-\infty \leq a_1 < b_1 < \ldots < a_n < b_n \leq +\infty$.

Можно считать, более того, что h-окрестности данных интервалов $\Delta_i^h = [a_i - h, b_i + h]$ не пересекаются. В противном случае, если $\Delta_i^h \cap \Delta_j^h \neq \varnothing$ для некоторых $i < j$, имеем $\Delta_i^h \cup \Delta_j^h = [a_i, b_j]^h$ и, поэтому два интервала Δ_i и Δ_j (вместе со всеми внутренними интервалами, если таковые найдутся) могут быть заменены на один интервал $[a_i, b_j]$, так что мера нового множества возрастет, в то время как мера h-окрестности не изменится (причем новое множество будет уже состоять из меньшего числа интервалов, непересекающихся своими h-окрестностями).

Теперь будем изменять множество A, двигая с растяжением или сжатием интервалы Δ_i так, чтобы сохранялась их мера $p_i = \mu(\Delta_i)$ и следовательно мера p всего множества A, и при этом внутренности интервалов не пересекались. Таким образом, правые концы интервалов $b_i = b(a_i)$ будут определяться левыми согласно (1.2.5). По лемме 1.2.1 в случае, когда $a_i \leq a_0(p_i, h)$, мы можем двигать a_i влево вплоть до точки $a_i = b_{i-1}$ при $i > 1$ или до $a_i = -\infty$ при $i = 1$. Соответственно в случае $a_i > a_0(p_i, h)$ мы двигаем a_i вправо до тех пор, пока $b_i = a_{i+1}$ при $i < n$ или $b_i = +\infty$ при $i = n$.

Применяя эту процедуру к любому из внутренних интервалов Δ_i $(1 < i < n,\ n \geq 3)$, мы получим новый интервал Δ_i' меры p_i и новое множество A_1, отличающееся от A тем, что интервал Δ_i заменен на Δ_i'. Тогда $\mu(A_1) = \mu(A)$, но по лемме 1.2.1

$$\mu(A_1^h) \leq \sum \mu((\Delta_j')^h) \leq \sum \mu(\Delta_j^h) = \mu(A^h), \tag{1.2.6}$$

так как $A_1^h = \cup(\Delta_j')^h$, и Δ_j^h $(1 \leq j \leq n)$ не пересекаются. Кроме того, A_1 будет состоять из $n-1$ интервала. Можно продолжить этот процесс и построить множества $A_2, \ldots, A_{n-2}$. Последнее множество будет состоять из двух интервалов. Еще раз применяя процедуру к этим двум интервалам, мы получим множество B следующих трех типов (включая очевидные случаи $n = 1$ и $n = 2$):

$$B = [-\infty, a], \quad B = [b, +\infty], \quad B = [-\infty, a] \cup [b, +\infty].$$

Во всех случаях $\mu(B) = \mu(A)$, $\mu(B^h) \leq \mu(A^h)$, так как (1.2.6) использовалось на каждом шаге. Чтобы исключить множества третьего типа, остается применить второе утверждение леммы 1.2.1. Теорема 1.2.1 доказана.

Доказательство следствия 1.2.1. Положим

$$C = \liminf_{p \to 0^+} I_\mu(p)/p.$$

Пусть $p \in (0,1)$ фиксировано. В силу теоремы 1.2.2, функция $I_\mu = f(F^{-1})$ симметрична относительно точки $p = 1/2$ (то есть мера μ симметрична относительно своей медианы m – пусть для определенности $m = 0$) и субаддитивна. Поэтому $I_\mu(\sum p_i) \le \sum I_\mu(p_i)$ для конечных семейств (p_i) положительных чисел, таких что $\sum p_i < 1$. В силу непрерывности I, можно рассматривать также счетные семейства. Если бы было $C = 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ можно было бы выбрать такую последовательность $p_i \to 0^+$, что $I_\mu(p_i)/p_i \le \varepsilon$. Выбирая подпоследовательность (возможно с повторяющимися членами), можно считать, что $\sum p_i = p$. Но тогда

$$I_\mu(\sum_i p_i) \le \sum_i I_\mu(p_i) \le \sum_i \varepsilon p_i = \varepsilon p,$$

то есть, $I_\mu(p) = 0$ (в силу произвольности ε). Следовательно $C > 0$. Так как I_μ симметрична относительно $1/2$, то для некоторого $c > 0$ $I_\mu(p) \ge cp(1-p)$ для всех $p \in (0,1)$. По теореме 1.1.1 (и согласно последующему примеру, связанному с логистическим распределением),

$$F(F^{-1}(p) + h) = R_{h,\mu}(p) \ge \frac{p}{p + (1-p)\exp(-ch)}, \qquad h > 0.$$

В частности, при $p = \frac{1}{2}$ имеем $F(h) \ge \dfrac{1}{1 + \exp(-ch)}$ для всех $h > 0$, что и доказывает существование конечных экспоненциальных моментов.

Замечание 1.2.1. В утверждении следствия 1.2.1. с помощью примерно тех же рассуждений, применяемых к интегральной изопериметрической функции $R_{h,\mu}$ (вместо I_μ), можно снять условие существования (непрерывной положительной) плотности меры μ. Действительно, пусть (без каких-либо дополнительных предположений)

$$R_{h,\mu}(p) = \inf_{\mu(A)\geq p} \mu(A^h) = F\big((F^{-1}(p) + h)^-\big) \tag{1.2.7}$$

для всех $p \in (0,1)$ и $h > 0$ ($F^{-1}(p)$ обозначает наименьшую квантиль F порядка p). То есть, для каждого множества $A \subset \mathbf{R}$ меры $0 < \mu(A) < 1$ найдется полуинтервал вида $B = (-\infty, b]$, такой что $\mu(A) \leq \mu(B)$ и при этом $\mu(A^h) \geq \mu(B^h)$. Если применить это свойство к полуинтервалам вида $A = [a, +\infty)$ и записать его в терминах случайных величин ξ и ζ^*, таких что ξ имеет распределение μ, а $\zeta^* = -\xi$, то мы получим в точности неравенство (1.1.17). В силу леммы 1.1.1, для некоторой функции $g^* : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, такой что $\|g^*\|_{Lip} \leq 1$, с.в. ξ и $g^*(\zeta^*)$ будут одинаково распределены. Отсюда легко получаем, что для некоторого $a \in \mathbf{R}$ с.в. $\xi - a$ и ζ^* одинаково распределены, то есть, мера μ симметрична относительно своей медианы.

Кроме того, из (1.2.7) с учетом симметричности μ, получаем свойство субаддитивности функций $R_{h,\mu}$: для всех $0 < p, q < 1$, таких что $p + q < 1$,

$$R_{h,\mu}(p + q) \leq R_{h,\mu}(p) + R_{h,\mu}(q). \tag{1.2.8}$$

Покажем, что $\liminf_{p\to 0^+} R_{h,\mu}(p)/p > 1$ для всех достаточно больших $h > 0$. Если этот $\liminf = 1$, то для всех $\varepsilon > 0$ множество $E_\varepsilon = \{p \in (0,1) : R_{h,\mu}(p) \leq (1+\varepsilon)p\}$ бесконечно, и кроме того $0 \in \overline{E_\varepsilon}$. Поэтому для каждого $p \in (0,1)$ можно подобрать последовательность $p_n \in E_\varepsilon$, такую что $r_n = p_1 + \cdots + p_n \to p$ при $n \to \infty$. В силу (1.2.8),

$$R_{h,\mu}(r_n) \leq R_h(p_1) + \cdots + R_h(p_n) \leq (1+\varepsilon)(p_1 + \cdots + p_n) \leq (1+\varepsilon)p.$$

Устремляя $n \to \infty$ и используя непрерывность слева функции $R_{h,\mu}$, получаем $R_{h,\mu}(p) \le (1+\varepsilon)p$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ и с учетом обратного неравенства $R_{h,\mu}(p) \ge p$, приходим к равенству $R_{h,\mu}(p) = p$, $p \in (0,1)$. Но такое возможно (при всех $h > 0$) только для вырожденной меры.

Итак, можно подобрать $h > 0$, $p_0 \in (0,1)$ и $c > 1$, такие что $R_{h,\mu}(p) = F\big((F^{-1}(p) + h)^-\big) \ge cp$ для всех $p \in (0, p_0]$ (необходимо $cp_0 \le 1$). Следовательно $F(F^{-1}(p) + 2h) \ge cp$, то есть, $F^{-1}(cp) - F^{-1}(p) \le 2h$. В частности,

$$F^{-1}(c^k p) - F^{-1}(c^{k-1}p) \le 2h$$

для всех $k = 1, \ldots, n$, если $c^{n-1}p \le p_0$. Суммирование по всем k дает $F^{-1}(c^n p) - F^{-1}(p) \le 2nh$. Применяя это неравенство к $p = p_0 c^{-n}$, получаем

$$F^{-1}(p_0 c^{-n}) \ge -2nh + F^{-1}(p_0).$$

Отсюда уже легко при некотором $a > 0$ получить оценку вида $F(x) \ge \exp(ax)$ при $x \to -\infty$.

Замечание 1.2.2. Рассмотрение "интегральной" изопериметрической задачи для более широких классов, нежели тех, о которых шла речь в теоремах 1.2.1 и 1.2.2, приводит, как правило, к экстремальности множеств, составленных более, чем из одного интервала. Это, однако, в меньшей степени относится к "дифференциальной" изопериметрической задаче. Возьмем для примера класс одновершинных (унимодальных) распределений μ, не имеющих атома в вершине. В этом случае можно показать ([H]), что величина $\mu^+(A)$ минимизируется при условии $\mu(A) = p$ на некотором интервале $A = [x, y]$, то есть,

$$I_\mu(p) = \inf\{f(F^{-1}(p_1)) + f(F^{-1}(p_2)) : p_1, p_2 > 0, p_1 + p_2 = p\}.$$

Если распределение μ симметрично относительно своей вершины m, то это выражение упрощается:

$$I_\mu(p) = \min\{f(F^{-1}(p)), 2f(F^{-1}(\min(p, 1-p)/2))\},$$

то есть, в качестве минимизирующих выступают интервалы вида $(-\infty, x]$, а также интервалы, симметричные относительно m. Например, если μ имеет плотность

$$f(x) = \frac{1}{(|x|+2)^2}, \quad x \in \mathbf{R},$$

то $f(F^{-1}(p)) = \min\{p^2, (1-p)^2\}$ и, следовательно

$$I_\mu(p) = \frac{1}{2}\min\{p^2, (1-p)^2\} = \frac{1}{2} f(F^{-1}(p)).$$

Отметим, что класс одновершинных распределений включает в себя все логарифмически вогнутые меры. Но это не верно для класса мер, описанных в теореме 1.2.2. К последнему классу принадлежит мера μ с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{|x|}, \quad |x| < \log 2,$$

для которой функция $I(p) = f(F^{-1}(p)) = \max\{p, (1-p)\}$ является изопериметрической функцией, так как она удовлетворяет свойству c) из теоремы 1.2.2. Но, конечно, μ не является одновершинной.

§ 1.3. Функциональная форма изопериметрических неравенств. I

Возвратимся к абстрактной ситуации § 1.1 – изопериметрическим неравенствам в интегральной форме

$$\mu(U(A)) \geq R(\mu(A)), \tag{1.3.1}$$

где μ – (борелевская) вероятностная мера в топологическом пространстве M, и окрестности множеств

$$U(A) = \bigcup_{a \in A} U(a) \tag{1.3.2}$$

строятся с помощью некоторой системы $U(x)$ открытых окрестностей точек $x \in M$. В (1.3.1) $R : [0,1] \to [0,1]$ – некоторая возрастающая непрерывная функция, такая что $R(0) = 0$, $R(1) = 1$.

Спрашивается: когда и как можно обобщить (1.3.1) с "множеств" на "функции"? Чтобы сделать вопрос более корректным, следует ввести понятие "окрестности" Ug функций g так, чтобы на индикаторных функциях $g = 1_A$ получить прежнее определение (1.3.2).

Для любой функции $g : M \to \mathbf{R}$ положим

$$Ug(x) = \sup\{g(a) : x \in U(a)\}, \quad x \in M. \tag{1.3.3}$$

Тогда, конечно, $U(1_A) = U(A)$. В качестве "модельного" неравенства будем рассматривать следующую функциональную форму для (1.3.1):

$$\mathbf{E}\, Ug \geq R\left(\mathbf{E}\, R^{-1}(f)\right), \tag{1.3.4}$$

где g – произвольная измеримая (по Борелю) функция на M со значениями в $[0,1]$, R^{-1} – обратная к R, и математические ожидания понимаются в смысле меры μ.

Очевидно, на индикаторных функциях это неравенство возвращает нас к первоначальному неравенству (1.3.1), так что (1.3.4) действительно может служить функциональной формой для (1.3.1). Однако, применение (1.3.4) к функциям, принимающим два произвольных значения (а не только 0 и 1), уже приводит к некоторым существенным ограничениям на R. К счастью, во многих важных случаях такие ограничения не усилятся при рассмотрении в (1.3.4) более общих функций.

Теорема 1.3.1. Пусть $R : [0,1] \to [0,1]$ – возрастающая вогнутая функция, $R(0) = 0$, $R(1) = 1$, обладающая следующими свойствами: для всех $p, q \in [0,1]$

$$R(pq) \leq R(p)R(q), \tag{1.3.5}$$

$$S(pq) \geq S(p)S(q), \tag{1.3.6}$$

где $S(p) = 1 - R(1-p)$, $p \in [0,1]$. Тогда, если (1.3.1) выполняется для всех измеримых множеств $A \subset M$, то (1.3.4) выполняется для всех измеримых функций $g : M \to [0,1]$.

Определение 1.3.1. Будем говорить, что неубывающая функция $R : (0,1] \to (0,1]$ является мультипликативным модулем, если $R(pq) \leq R(p)R(q)$ для всех $p, q \in (0,1]$.

Определение 1.3.2. Мультипликативный модуль R будем называть совершенным модулем, если $S(pq) \geq S(p)S(q)$ для всех $p, q \in [0,1)$, где $S(p) = 1 - R(1-p)$.

Будем говорить, что совершенный модуль R – нетривиальный, если $R \neq 1$ (тождественно).

В дальнейшем нам потребуется исследовать различные свойства мультипликативных модулей. Здесь же только отметим, что нетривиальный совершенный модуль R, доопределенный по непрерывности равенством $R(0) = 0$, должен быть возрастающей (и следовательно непрерывной) биекцией из [0,1] в [0,1]. При этом неравенство в (1.3.6) можно записать как

$$R^*(pq) \leq R^*(p)R^*(q),$$

где $R^*(p) = 1 - R^{-1}(1-p)$ – своего рода "дуальная" функция к R (R^{-1} – функция, обратная к R). Таким образом, возрастающая биекция $R : [0,1] \to [0,1]$ является совершенным модулем тогда и только тогда, когда R и R^* являются одновременно мультипликативными модулями.

Примеры. Пусть $0 < \alpha \leq 1$, $h > 0$. Совершенными модулями являются функции:

1) $R(p) = p^\alpha$ (лемма 2.4.3);

2) $R(p) = \min\{p^\alpha, 1-(1-p)^{1/\alpha}\}$ (следствие 2.4.3);

3) $R(p) = F(F^{-1}(p)+h)$, где функция распределения F принадлежит классу, описанному в следствии 1.4.1.

Доказательство теоремы 1.3.1 основано на следующем утверждении.

Лемма 1.3.2. Пусть $R : [0,1] \to [0,1]$ – возрастающая вогнутая функция, такая что $R(0) = 0$, $R(1) = 1$. Функция R является совершенным модулем тогда и только тогда, когда для всех $0 \leq y \leq x \leq 1$, $0 \leq p \leq 1$,

$$R(px + (1-p)y) \leq R(p)R(x) + (1-R(p))R(y), \tag{1.3.7}$$

или, более общо, когда для любой функции распределения F некоторой вероятностной меры на $[0,1]$

$$R\left(\int_0^1 R^{-1}\, dF\right) \ \leq \ \int_0^1 R(1-F(t))\, dt. \tag{1.3.8}$$

Доказательство. Сначала заметим, что (1.3.7) превращается в (1.3.5) когда $y = 0$ и превращается в (1.3.6) когда $x = 1$, в то время, как (1.3.8) превращается в (1.3.7) для мер с двумя атомами. Таким образом, остается из (1.3.5)–(1.3.6) вывести (1.3.7) и (1.3.8). Зафиксируем $c \in [0,1]$ и $p \in [0,1]$. Левая часть (1.3.7) постоянна на сегменте

$$\Delta(c) = \{(x,y) : 0 \le y \le x \le 1,\, px + (1-p)y = c\},$$

в то время как правая часть представляет собой вогнутую функцию пары $(x,y) \in \Delta(c)$. Поэтому (1.3.7) выполняется на всем сегменте, тогда и только тогда, когда это неравенство выполняется в концевых точках $\Delta(c)$. Но в концевых точках (x,y), очевидно, $y = 0$ или $x = 1$. При таких ограничениях (1.3.7) сводится, соответственно. к (1.3.5) и (1.3.6).

Для доказательства (1.3.8), снова зафиксируем $c \in [0,1]$ и рассмотрим выпуклое компактное множество

$$K(c) = \left\{ F : \int_0^1 R^{-1} dF = c \right\}$$

в пространстве всех вероятностных распределений на [0,1] (с топологией слабой сходимости). Снова левая часть (1.3.8) постоянна на $M(c)$, в то время как правая часть представляет собой вогнутую непрерывную функцию "точки" $F \in M(c)$. Поэтому, (1.3.8) выполняется на всем $M(c)$, тогда и только тогда, когда это неравенство выполняется для всех экстремальных точек $M(c)$. Но экстремальные точки $M(c)$ имеют максимум два атома, а для таких мер (1.3.8) сводится к (1.3.7).

Замечание. Чтобы последнее рассуждение сделать более доказательным, можно ограничиться в (1.3.8) мерами с носителем в конечном множестве $T = \{t_1, \cdots, t_n\} \subset [0,1]$. Если положить $a_i = R^{-1}(t_i)$, и если p_i – веса F в точках t_i, то нам нужно найти экстремальные точки выпуклого компакта

$$K_n(c) = \left\{ (p_1, \cdots, p_n) : p_i \ge 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1, \sum_{i=1}^n a_i p_i = c \right\}.$$

Хорошо известно, что экстремальные точки пересечения любого многогранника Δ с гиперплоскостью лежат на ребрах Δ. В нашем случае в роли

$$\Delta = \{(p_1, \cdots, p_n) : p_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1\}$$

выступает стандратный симплекс, у которого экстремальные точки суть элементы стандартного базиса e_i в $\mathbf{R}^n$, а гиперплоскость определяется уравнением $\sum_{i=1}^{n} a_i p_i = c$. Следовательно, точки на ребрах будут иметь вид $te_i + (1-t)e_j$, $t \in [0,1]$.

Доказательство теоремы 1.3.1. Отметим простейшие свойства операции U.

$a)$ $0 \leq g \leq Ug \leq 1$, если $0 \leq g \leq 1$;

$b)$ $\{Ug > t\} = U(\{g > t\})$ для всех $t \in \mathbf{R}$;

$c)$ поэтому функция Ug полунепрерывна снизу и, следовательно, измерима.

С учетом этих свойств и, применяя (1.3.1) и (1.3.8) к функции $g : M \to [0,1]$ с функцией распределения $F(t) = \mu(\{g \leq t\})$, имеем:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\, Ug &= \int_0^1 \mu(\{Ug > t\})\, dt = \int_0^1 \mu(U(\{g > t\}))\, dt \\
&\geq \int_0^1 R(\mu(\{g > t\}))\, dt = \int_0^1 R(1 - F(t))\, dt \\
&\geq R\left(\int_0^1 R^{-1}\, dF\right) = R\left(\mathbf{E}\, R^{-1}(g)\right).
\end{aligned}$$

Теорема 1.3.1 доказана.

§ 1.4. Функциональная форма изопериметрических неравенств. II

Применим теорему 1.3.1 к частному случаю, когда (M, ρ, μ) – метрическое пространство с вероятностной мерой, причем, как обычно, изопериметрическая задача рассматривается для канонической операции $U_h(A) = A^h$, $h > 0$. Будем теперь исходить из изопериметрических неравенств, записанных в дифференциальной форме,

$$\mu^+(A) \geq I(\mu(A)), \tag{1.4.1}$$

где I – некоторая положительная непрерывная функция на (0,1), и $A \subset M$ – произвольное измеримое (по Борелю) множество меры $0 < \mu(A) < 1$. Будем также предполагать, что I симметрична относительно точки $p = 1/2$.

Наша задача – найти соответствующую функциональную форму для (1.4.1). Если записать это неравенство в интегральной форме (используя теорему 1.1.1), то по теореме 1.3.1 мы можем получить целое семейство функциональных неравенств, заиндексированных параметром h. Поэтому желательно найти инфинитезимальную версию, которая содержала бы в себе все это семейство.

Пусть F – функция распределения, ассоциированная с I: она была определена соотношением (1.1.10) через обратную функцию

$$F^{-1}(p) = \int_{1/2}^{p} \frac{dt}{I(t)}, \qquad 0 < p < 1. \tag{1.4.2}$$

Снова положим

$$R_h(p) = F\big(F^{-1}(p) + h\big), \qquad 0 < p < 1, \ h \in \mathbf{R}. \tag{1.4.3}$$

Адаптируя определение (1.3.3), нам следует определить

$$U_h g(x) = \sup\{g(a) : \rho(a, x) < h\}, \quad x \in M, \ h > 0.$$

Если бы оказалось, что при всех $h > 0$ R_h является вогнутым совершенным модулем, то по теореме 1.1.1 и 1.3.1

$$\mathbf{E}\, U_h g \geq R_h\big(\mathbf{E}\, R_h^{-1}(g)\big) \tag{1.4.4}$$

для всех измеримых функций g на M со значениями в $[0,1]$ (R_h^{-1} – обратная к R_h, и математические ожидания понимаются в смысле меры μ). Мы получим искомое неравенство, полагая в (1.4.4) $h \to 0^+$.

Чтобы совершить такой предельный переход, отметим сначала некоторые необходимые предположения, вытекающие из того факта, что R_h образует семейство вогнутых совершенных модулей. Во первых, функция R_h должна быть возрастающей биекций в $(0,1)$, причем $R_h(0^+) = 0$, $R_h(1^-) = 1$ (лемма 1.4.2), что равносильно тому, что носитель меры F есть вся вещественная прямая $\mathbf{R}$ или, в терминах I,

$$\int_0^1 \frac{dt}{I(t)} = +\infty. \tag{1.4.5}$$

Во-вторых, полагая $h \to 0^+$ в неравенстве $R_h(pq) \leq R_h(p)R_h(q)$, получаем другое необходимое условие:

$$\frac{I(pq)}{pq} \leq \frac{I(p)}{p} + \frac{I(q)}{q}, \qquad p, q \in (0,1). \tag{1.4.6}$$

Это условие оказывается также и достаточным для того, чтобы все R_h были мультипликативными модулями (лемма 1.4.3). В действительности условие (1.4.6) – более сильное, чем (1.4.5): если записать (1.4.6) для конечных наборов $(p_i)_{1 \leq i \leq n}$, в частности, как неравенство $I(p^n) \leq np^{n-1}I(p)$, легко вывести оценку $I(p) \leq Cp\log(1/p)$ с некоторой постояннй C, не зависящей от $p \in (0,1)$. С учетом симметричности функции I заключаем, что (1.4.6) влечет (1.4.5), и при этом $I(0^+) = I(1^-) = 0$.

Заметим, что мера F симметрична относительно нуля (в силу симметричности I), и поэтому как следствие (1.4.6) и (1.3.5) функции

$$S_h(p) \equiv 1 - R_h(1-p) = R_h^{-1}(p) = R_{-h}(p)$$

удовлетворяют неравенству (1.3.6): $S_h(pq) \geq S_h(p)S_h(q)$ (в терминах "дуальной" функции $R_h^* = R_h$).

Наконец, вогнутость всех R_h равносильна вогнутости функции I (лемма 1.4.5).

Таким образом, (1.4.6) и вогнутость функции I (в дополнение к первоначальному условию симметричности) – вот те условия, при которых мы можем получить семейство функциональных неравенств (1.4.4). Чтобы рассматривать малые h в левой части этого неравенства, введем следующее

Определение 1.4.1. Для функции g на M будем называть функцию

$$|\nabla g(x)| = \limsup_{\rho(x,y) \to 0^+} \frac{|g(x) - g(y)|}{\rho(x,y)}, \qquad x \in M, \tag{1.4.7}$$

модулем градиента g (полагая $|\nabla g(x)| = 0$ в изолированных точках).

Очевидно, для дифференцируемых функций g на $M = \mathbf{R}^n$ (с евклидовой метрикой $\rho = \rho_2$) (1.4.7) определяет модуль (т.е., ℓ^2-норму) обычного градиента. В общем случае условие непрерывности гарантирует измеримость $|\nabla g|$. В дальнейшем мы будем применять это определение только к функциям, имеющих конечную липшицеву норму на всех шарах в M. В $\mathbf{R}^n$ это свойство сводится к локальной липшицевости, и, как известно, такие функции почти всюду дифференцируемы (теорема Радемахера).

Теорема 1.4.1. Пусть I – вогнутая непрерывная функция на [0,1], положительная на (0,1), симметричная относительно точки 1/2 и удовлетворяющая условию (1.4.6). Следующие условия эквивалентны.

a) для всех измеримых множеств $A \subset M$ $\mu^+(A) \ge I(\mu(A))$;

b) для всех измеримых функций $g : M \to [0,1]$ и $h > 0$

$$\mathbf{E}\, U_h g \ge R_h(\mathbf{E}\, R_{-h}(g))\,;$$

c) для любой функции $g : M \to [0,1]$, имеющей конечную липшицеву норму на всех шарах в M,

$$I(\mathbf{E}g) - \mathbf{E}I(g) \le \mathbf{E}|\nabla g|. \tag{1.4.8}$$

Например, функциональной формой для изопериметрического неравенства $\mu^+(A) \ge c\mu(A)(1-\mu(A))$ служит неравенство

$$c\,\mathrm{Var}(g) \le \mathbf{E}|\nabla g|$$

(заметим, что это неравенство – неоднородное). В этом случае $I(p) = p(1-p)$, и неравенство (1.4.6), очевидно, выполняется. Одно достаточное условие для (1.4.6) в терминах ассоциированной функции F будет приведено в лемме 1.4.4.

Функция $I = I_\mu$ оптимальна для неравенства в *a*). В этом важном случае в предположении непрерывности функции I_μ условие (1.4.6) также и необходимо для выполнения неравенства (1.4.8): если его применить к qg с липшицевыми функциями g, аппроксимирующими индикаторные функции 1_A множеств $A \subset M$ меры p (как в лемме 1.4.1), то мы получим неравенство (1.4.6) для I_μ.

Доказательство теоремы 1.4.1. С учетом упомянутых лемм 1.4.2, 1.4.3 и 1.4.5, *a*) влечет *b*). Выведем *c*) из *b*). Предположим, что $\varepsilon < g < 1-\varepsilon$ при некотором $\varepsilon \in (0,1/2)$. Напомним, что F имеет непрерывную, положительную на всей числовой прямой производную $f = F'$, причем $I(p) = F'(F^{-1}(p))$. Тогда при $\varepsilon \le p \le 1-\varepsilon$ и $|h| \le 1$

$$\begin{aligned} R_h(p) - p - I(p)h &= F(F^{-1}(p)+h) - p - f(F^{-1}(p))\,h \\ &= \int_0^h [f(F^{-1}(p)+t) - f(F^{-1}(p))]\,dt \le \omega(|h|)\,h, \end{aligned}$$

где $\omega = \omega(s)$ – модуль непрерывности функции f на интервале $[a_\varepsilon, b_\varepsilon] = [F^{-1}(\varepsilon) - 1, F^{-1}(1-\varepsilon) + 1]$:

$$\omega(s) = \sup\{|f(u) - f(v)| : |u - v| \le s; u, v \in [a_\varepsilon, b_\varepsilon]\}.$$

Так как $\omega(|h|) \to 0$ при $h \to 0$, имеем

$$R_h(p) = p + I(p)h + c_p(h)h, \quad 0 < p < 1, \tag{1.4.9}$$

где $c_p(h) \to 0$ при $h \to 0$ равномерно на интервале $\varepsilon \le p \le 1 - \varepsilon$. Как следствие,

$$\mathbf{E}R_{-h}(g) = \mathbf{E}g - \mathbf{E}I(g)h + o(h), \quad h \to 0.$$

Снова, так как $\varepsilon < \mathbf{E}R_{-h}(g) < 1 - \varepsilon$ при достаточно малых h, применяя (1.4.9) к $p = \mathbf{E}R_{-h}(g)$, получаем

$$R_h(\mathbf{E}R_{-h}(g)) = (\mathbf{E}g - \mathbf{E}I(g)h + o(h)) + I(\mathbf{E}R_{-h}(g))h + o(h),$$

то есть,

$$\frac{R_h(\mathbf{E}R_{-h}(g)) - \mathbf{E}g}{h} = I(\mathbf{E}g) - \mathbf{E}I(g) + o(1), \quad h > 0 \tag{1.4.10}$$

Перейдем теперь к левой части неравенства в b). Предположим дополнительно, что $g(x) - g(y) \le c\rho(x, y)$ для всех $x, y \in M$, то есть, g имеет конечную липшицеву норму на всем M. Отсюда $U_h g(x) - g(x) \le ch$ для всех $x \in M$ и $h > 0$. Заметим, что

$$\limsup_{h \to 0^+} \frac{U_h g(x) - g(x)}{h} = \limsup_{y \to x} \frac{g(y) - g(x)}{\rho(x, y)} \le |\nabla g(x)|.$$

Применяя b), (1.4.10) и теорему Лебега о мажорируемой сходимости, получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{E}|\nabla g| &\ge \mathbf{E} \limsup_{h \to 0^+} \frac{U_h g - g}{h} \ge \limsup_{h \to 0^+} \mathbf{E}\, \frac{U_h g - g}{h} \\ &\ge \limsup_{h \to 0^+} \frac{R_h(\mathbf{E}R_{-h}(g)) - \mathbf{E}g}{h} \ge I(\mathbf{E}g) - \mathbf{E}I(g).\end{aligned}$$

Таким образом, (1.4.8) установлено при условии, что значения g отделены от 0 и 1, и $\|g\|_{Lip} < +\infty$. Если же первое предположение нарушено, но выполнено второе, то можно применить (1.4.8) к функциям $g_\varepsilon = \min\{\max(g, \varepsilon), 1-\varepsilon\}$, для которых $\|g_\varepsilon\|_{Lip} \leq \|g\|_{Lip} < +\infty$. Устремляя $\varepsilon \to 0^+$, получаем (1.4.8) для g. Наконец, в общем случае, фиксируя точку x_0 в M, рассмотрим усечения вида $g_r(x) = g(x)T_r(x)$, $r > 0$, $x \in M$, где

$$T_r(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \rho(x_0, x) < r, \\ r + 1 - \rho(x_0, x), & \text{если} \quad r \leq \rho(x_0, x) \leq r + 1, \\ 0, & \text{если} \quad \rho(x_0, x) > r + 1, \end{cases}$$

Очевидно, $\|T_r\|_{Lip} \leq 1$ и $\|g_r\|_{Lip} \leq |g(x_0)| + rC_r$, где C_r – липшицева константа g на шаре $D(x_0, r)$. Кроме того,

$$|\nabla g_r(x)| = \begin{cases} |\nabla g(x)|, & \text{если} \quad \rho(x_0, x) < r, \\ 0, & \text{если} \quad \rho(x_0, x) > r + 1. \end{cases}$$

Если же $r < \rho(x_0, x) < r + 1$, $r < \rho(x_0, y) < r + 1$, то

$$|g_r(y) - g_r(x)| \leq |g(y) - g(x)| + |g(x)|\rho(x, y),$$

следовательно

$$|\nabla g_r(x)| = \limsup_{y \to x} \frac{|g_r(y) - g_r(x)|}{\rho(x, y)} \leq |\nabla g(x)| + |g(x)|.$$

Устремляя $r \to +\infty$ по множеству таких значений, для которых $\mu\{x : \rho(x_0, x) = r\} + \mu\{x : \rho(x_0, x) = r + 1\} = 0$, получаем

$$\mathbf{E}|\nabla g_r| \leq \mathbf{E}|\nabla g| + \mathbf{E}|g|\, 1_{\{r < \rho(x_0, x) < r+1\}} \to \mathbf{E}|\nabla g|. \tag{1.4.11}$$

Применяя (1.4.8) к f_r с учетом (1.4.11) и того, что g_r сходится к g поточечно, получаем (1.4.8) для g.

$c) \Rightarrow a)$: как ранее отмечалось, достаточно в неравенстве $a)$ рассматривать только замкнутые A. Аппроксимируя в (1.4.8) индикаторную функцию 1_A липшицевыми функциями из нижеследующей леммы, мы приходим к неравенству в a).

Лемма 1.4.1. Для любого замкнутого множества $A \subset M$ существует последовательность функций $g_n : M \to [0,1]$, $\|g_n\|_{Lip} < +\infty$, поточечно сходящихся при $n \to \infty$ к 1_A, таких что

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbf{E}|\nabla g_n| \le \mu^+(A).$$

Доказательство. Пусть A непусто. Так как для всех $0 < h < h'$, $\overline{A^h} \subset A^{h'}$, μ-периметр можно определить как

$$\mu^+(A) = \liminf_{h\to 0^+} \frac{\mu(\overline{A^h}) - \mu(A)}{h}.$$

Следовательно для некоторй последовательности $h_n \to 0^+$ имеем

$$\frac{\mu(\overline{A^{h_n}}) - \mu(A)}{h_n} \to \mu^+(A).$$

Возьмем $c_n \in (0,1)$, такие что $c_n \to 0$, и положим

$$g_n(x) = \min\left\{1,\ \frac{\rho(A^{c_n h_n}, x)}{(1-c_n)h_n}\right\},$$

где $\rho(B,x) = \inf\{\rho(b,x) : b \in B\}$. Так как $\|\rho(B,x)\|_{Lip} \le 1$, имеем $\|g_n\|_{Lip} \le \dfrac{1}{(1-c_n)h_n}$, и поэтому $|\nabla g_n(x)| \le \dfrac{1}{(1-c_n)h_n}$ для всех $x \in M$. Заметим, что для $x \notin A^{h_n}$ $\rho(A,x) \ge h_n$, и по неравенству треугольника $\rho(A^{c_n h_n}, x) \ge (1-c_n)h_n$. Для таких x $g_n(x) = 1$ и, следовательно $|\nabla g_n| = 0$ на открытом множестве $M \setminus \overline{A^{h_n}}$. Аналогично, $g_n = 0$ на (открытом) множестве $A^{c_n h_n}$, поэтому $|\nabla g_n| = 0$ на $A^{c_n h_n}$ и, в частности, на A. Таким образом,

$$\mathbf{E}|\nabla g_n| \le \frac{\mu(\overline{A^{h_n}}) - \mu(A)}{(1-c_n)h_n} \longrightarrow \mu^+(A).$$

Лемма доказана.

Лемма 1.4.2. Пусть R – мультипликативный модуль. Тогда

a) $R(1) = 1$, при этом R непрерывна в точке $p = 1$;

b) если $R(p) < 1$ для некоторого $p \in (0,1)$, то $R(0^+) = 0$;

c) если $R(p) < 1$ для всех $p \in (0,1)$, то R возрастает на $(0,1]$;

d) если R – нетривиальный совершенный модуль, то R – возрастающая биекция в $(0,1]$.

Доказательство.

a): $R(p) \le R(p)R(1)$, следовательно $R(1) = 1$. При этом, если бы $\lim_{p\to 1^-} R(p) = \alpha < 1$, то устремляя $p, q \to 1^-$ в неравенстве $R(pq) \le R(p)R(q)$, мы бы получили $\alpha \le \alpha^2$, что возможно только при $\alpha = 0$. Следовательно $\alpha = 1$.

b): Если $p_0 \in (0,1)$ и $R(p_0) < 1$, то $R(p_0^n) \le R(p_0)^n \to 0$.

c): $R(pq) \le R(p)R(q) < R(p)$ для всех $q \in (0,1)$.

d): Возьмем $p_0 \in (0,1)$, такое что $R(p_0) < 1$. Согласно *b*), $R(0^+) = 0$, следовательно $S(1^-) = 1$. Зафиксируем $p \in (0,1)$. Пусть p_1 и q_1 стремятся соответственно к p и 1 так, чтобы $p_1 > p$ и $p_1 q_1 < p$. Тогда из неравенства $S(p_1 q_1) \ge S(p_1)S(q_1)$ получаем, что $S(p^-) \ge S(p^+)$. Так как S не убывает, $S(p^-) = S(p^+)$, то есть, S непрерывна в точке p. Следовательно R непрерывна на (0,1).

Чтобы доказать последнее утверждение в *d*), заметим, что $S(q_0) > 0$ для $q_0 = 1 - p_0$. Поэтому $S(q_0^n) \ge S(q_0)^n > 0$. Так как S не возрастает, $S(q) > 0$ для всех $q \in (0,1)$, так что $R(p) < 1$ для $p \in (0,1)$. Остается воспользоваться *c*).

Лемма 1.4.3. Пусть F – функция распределения с непрерывной положительной плотностью f на $\mathbf{R}$, $F^{-1} : (0,1) \to \mathbf{R}$ – обратная к F. Пусть $R_h(p) = F(F^{-1}(p) + h)$, $p \in (0,1]$ ($R_h(1) = 1$). Следующие условия эквивалентны:

a) для всех $h > 0$ R_h – мультипликативный модуль: для любых $p, q \in (0,1)$

$$R_h(pq) \le R_h(p)R_h(q); \tag{1.4.12}$$

b) для любых $p, q \in (0,1)$,

$$\frac{f(F^{-1}(pq))}{pq} \le \frac{f(F^{-1}(p))}{p} + \frac{f(F^{-1}(q))}{q}. \tag{1.4.13}$$

Следствие 1.4.1. Пусть F – функция распределения с непрерывной положительной плотностью f на $\mathbf{R}$, причем, мера F симметрична (относительно своей медианы). Для всех $h > 0$ R_h будет совершенным модулем тогда и только тогда, когда выполнено условие (1.4.13).

Доказательство леммы 1.4.3. Полагая в (1.4.12) $h \to 0^+$, приходим к (1.4.13). Обратно: как и в доказательстве теоремы 1.1.1, воспользуемся тем важным свойством, что семейство R_h, $h \in \mathbf{R}$, образует однопараметрическую группу возрастающих биекций в $(0,1)$: для любых h и h' $R_{h+h'}$ – суперпозиция R_h и $R_{h'}$ (причем R_{-h} – обратная к R_h). Поэтому, если (1.4.13) верно для h и h', то это неравенство верно и для $h + h'$, так что только малые значения h существенны в (1.4.12), а для них оно сводится к (1.4.13). Чтобы сделать это рассуждение строгим, допустим сначала, что неравенство в (1.4.12) – строгое для всех $p, q \in (0,1)$. Зафиксируем $p, q \in (0,1)$ и положим

$$J(p,q) = \big\{ h > 0 : (1.4.13) \text{ верно для всех } h' \in (0,h] \big\}.$$

Нужно показать, что $J(p,q) = (0,+\infty)$ для всех $p, q \in (0,1)$. Очевидно $h \in J(p,q)$ при достаточно малых $h > 0$ и, так как R_h непрерывно зависит от h, достаточно показать, что как только $h \in J(p,q)$, $h + \varepsilon \in J(p,q)$ для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$. Пусть $h \in J(p,q)$, и положим $p' = R_h(p)$, $q' = R_h(q)$. В частности, $R_h(pq) \le p'q'$. В случае $R_h(pq) < p'q'$ доказывать нечего, так что можно предположить, что $R_h(pq) = p'q'$. Положим $I(t) = f(F^{-1}(t))$ при $0 < t < 1$. Тогда для всех $t \in (0,1)$ при $\varepsilon \to 0$

$R_\varepsilon(t) = t + I(t)\varepsilon + o(\varepsilon)$. В частности,

$$R_{h+\varepsilon}(p) = R_\varepsilon(R_h(p)) = p' + I(p')\varepsilon + o(\varepsilon),$$
$$R_{h+\varepsilon}(q) = R_\varepsilon(R_h(q)) = q' + I(q')\varepsilon + o(\varepsilon),$$
$$R_{h+\varepsilon}(pq) = R_\varepsilon(R_h(pq)) = p'q' + I(p'q')\varepsilon + o(\varepsilon). \tag{1.4.14}$$

Первые два разложения дают

$$R_{h+\varepsilon}(p)R_{h+\varepsilon}(q) = p'q' + (p'I(q') + q'I(p'))\varepsilon + o(\varepsilon). \tag{1.4.15}$$

По предположению $I(p'q') < p'I(q') + q'I(p')$ и, сравнивая (1.4.14) с (1.4.15), заключаем, что $R_{h+\varepsilon}(pq) < R_{h+\varepsilon}(p)R_{h+\varepsilon}(q)$, и, следовательно $h + \varepsilon \in J(p,q)$ для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

В общем случае, когда в (1.4.13) возможно равенство, рассмотрим функции вида $F_T(x) = F(T(x))$, где $T : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ – выпуклая функция с непрерывной возрастающей производной $T' > 0$ на $\mathbf{R}$, $T(-\infty) = -\infty$, $T(+\infty) = +\infty$. Обозначим через T^{-1} и F_T^{-1} обратные к T и F_T, соответственно. Проверим, что F_T удовлетвотяет предположениям, сделанным на первом шаге. Имеем: $f_T(x) \equiv F_T'(x) = f(T(x))T'(x)$, $F_T^{-1}(p) = T^{-1}(F^{-1}(p))$, следовательно

$$I_T(p) \equiv f_T(F_T^{-1}(p)) = f(F^{-1}(p))T'(T^{-1}(F^{-1}(p))) = I(p)\alpha(p),$$

где $\alpha(p) = T'(T^{-1}(F^{-1}(p)))$. Функция α возрастает на $(0,1)$, поэтому для всех $p, q \in (0,1)$, $\alpha(pq) < \min\big\{\alpha(p), \alpha(q)\big\}$. Используя (1.4.13) для функции I, имеем:

$$\begin{aligned}\frac{I_T(pq)}{pq} &= \frac{I(pq)}{pq}\alpha(pq) \le \frac{I(p)}{p}\alpha(pq) + \frac{I(q)}{q}\alpha(pq)\\ &< \frac{I(p)}{p}\alpha(p) + \frac{I(q)}{q}\alpha(q) = \frac{I_T(p)}{p} + \frac{I_T(q)}{q},\end{aligned}$$

то есть I_T удовлетворяет (1.4.13) со строгим неравенством. Следовательно, согласно первому шагу, для любых $p, q \in (0,1)$ и $h > 0$

$$F_T(F_T^{-1}(pq) + h) \le F_T(F_T^{-1}(p) + h)F_T(F_T^{-1}(q) + h). \tag{1.4.16}$$

Подбирая последовательность $T = T_n$ так, чтобы $T_n(x) \to x$ при $n \to \infty$ поточечно, получим $F_{T_n}(x) \to F(x)$ и $F_{T_n}^{-1}(p) \to F^{-1}(p)$ для всех $x \in \mathbf{R}$ и $p \in (0,1)$, и следовательно в пределе (1.4.16) превратится в (1.4.12). Лемма 1.4.3 доказана.

Лемма 1.4.4. Предположим, что функция распределения F имеет непрерывную положительную плотность f на $\mathbf{R}$, такую что функция $\log(f/F)$ вогнута. Тогда для всех $p, q \in (0,1)$,

$$\frac{f(F^{-1}(pq))}{pq} \leq \frac{f(F^{-1}(p))}{p} + \frac{f(F^{-1}(q))}{q}.$$

Доказательство. Покажем, что (1.4.12) выполняется при всех $h > 0$. Функция

$$\varphi_h(x) = -\log(R_h(\exp(-x)) = -\log(F(F^{-1}(\exp(-x)) + h))$$

положительна, непрерывна и возрастает на $(0, +\infty)$, и при этом $\varphi_h(0^+) = 0$. В терминах φ_h свойство (1.4.12) запишется как

$$\varphi_h(x + y) \geq \varphi_h(x) + \varphi_h(y), \quad x, y \geq 0,$$

поэтому достаточно проверить, что φ_h выпукла на $(0, +\infty)$. Очевидно, φ_h дифференцируема, причем

$$\varphi_h'(x) = \frac{R_h'(e^{-x})}{R_h(e^{-x})} e^{-x} = \frac{f(F^{-1}(e^{-x}) + h)}{f(F^{-1}(e^{-x}))} \frac{e^{-x}}{F(F^{-1}(e^{-x}) + h)}$$

не убывает на $(0, +\infty)$ тогда и только тогда, когда функция

$$\frac{f(F^{-1}(p) + h)}{f(F^{-1}(p))} \frac{p}{F(F^{-1}(p) + h)}$$

не возрастает на $(0,1)$, то есть (делая замену $p = F(x)$), когда функция

$$\frac{f(x+h)/F(x+h)}{f(x)/F(x)}$$

не возрастает на $\mathbf{R}$. Это верно, так как приращения функции $\log(f/F)$ на интервалах $[x, x+h]$ не возрастают.

Наконец, приведем несколько эквивалентных определений логарифмической вогнутости для мер на вещественной прямой. Пусть μ – неатомическая вероятностная мера на $\mathbf{R}$ с функцией распределения $F(x) = \mu((-\infty, x])$, $x \in \mathbf{R}$. Положим

$$a = \inf\{\, x \in \mathbf{R} : F(x) > 0 \,\}, \quad b = \sup\{\, x \in \mathbf{R} : F(x) < 1 \,\}.$$

Будем предполагать, что F (строго) возрастает на (a, b). Обозначим через $F^{-1} : (a, b) \to (0, 1)$ обратную к F функцию.

Лемма 1.4.5. Следующие условия эквивалентны:

a) мера μ логарифмически вогнута;

b) функции $R_h(p) = F(F^{-1}(p) + h)$ вогнуты на $(0, 1)$ при $h > 0$;

c) μ имеет непрерывную положительную плотность f на (a, b), причем функция $I(p) = f(F^{-1}(p))$ вогнута на $(0, 1)$.

Доказательство. Будем предполагать, что $a = -\infty$, $b = +\infty$ (в общем случае доказательство практически не изменится).

a) $\Rightarrow$ *b*): по условию μ имеет непрерывную положительную плотность f, такую что функция $\log f$ вогнута на $\mathbf{R}$. Следовательно для каждого $h > 0$ приращение $\log f(x + h) - \log f(x) = \log(f(x + h)/f(x))$ представляет собой невозрастающую функцию на $\mathbf{R}$, и значит производная $R_h'(p) = f(F^{-1}(p) + h)/f(F^{-1}(p))$ определена и не возрастает. Это влечет вогнутость R_h.

a) $\Rightarrow$ *c*): функция f абсолютно непрерывна, причем существует производная Радона-Никодима f' такая, что f'/f – невозрастающая производная Радона-Никодима функции $\log f$. Так как F – непрерывно дифференцируемая, функция

$$I'(p) = \frac{f'(F^{-1}(p))}{f(F^{-1}(p))}$$

представляет собой производную Радона-Никодима функции I на (0,1). Очевидно, I' не возрастает, поэтому I вогнута.

$c) \Rightarrow a)$: по условию, существует невозрастающая производная Радона-Никодима I'. Так как F непрерывно дифференцируема, функция $I'(F(x))f(x)$ представляет собой производную Радона-Никодима функции $I(F(x))$. Но $I(F(x)) = f(x)$ для всех $x \in \mathbf{R}$, следовательно f абсолютно непрерывна и, более того, $f' \equiv I'(F(x))f(x)$ – производная Радона-Никодима функции $f(x)$. Поэтому, $I'(F) = f'/f$ – производная Радона-Никодима функции $\log f$. Так как $I'(F)$ не возрастает, $\log f$ вогнута на $\mathbf{R}$.

$b) \Rightarrow a)$: заметим, что доказывать нечего при условии, что F имеет положительную непрерывную плотность f. Действительно, в этом случае $I(p) = \lim_{h \to 0^+}(R_h(p) - p)/h$ вогнута как поточечный предел вогнутых функций, и мы получаем $c)$ и значит $a)$. Этого уже достаточно для нужд теоремы 1.4.1. Тем не менее, интересно, что при условии $b)$ никакой сингулярной компоненты у μ быть не может, и ниже мы приводим соответствующее доказательство.

Итак, для всех $h > 0$ R_h вогнута, следовательно существует невозрастающая производная Радона-Никодима L_h функции R_h, причем она может быть выбрана непрерывной справа. Кроме того, $L_h(p) > 0$ для всех $p \in (0,1)$ (так как в дополнение к вогнутости, R_h возрастает и $R_h(p) \to 1$ при $p \to 1^-$). Так как $R_h(F(x)) = F(x+h)$, можно записать тождество

$$F(y+h) - F(x+h) = \int_{F(x)}^{F(y)} L_h(t)\,dt,$$

справедливое для всех $x, y \in \mathbf{R}$ и $h > 0$. Устремляя $y \to x$, получаем

$$F(y+h)-F(x+h) = L_h(F(x))(F(y)-F(x))+o(F(y)-F(x)),\ \ y \to x^+,$$

$$F(y+h)-F(x+h) = L_h(F(x)^-)(F(y)-F(x))+o(F(y)-F(x)),\ \ y \to x^-.$$

В частности, если F дифференцируема в точке x, то существуют пределы

$$f_r(x+h) \equiv \lim_{y \to x+} \frac{F(y+h) - F(x+h)}{y-x} = L_h(F(x))F'(x),$$

$$f_l(x+h) \equiv \lim_{y \to x-} \frac{F(y+h) - F(x+h)}{y-x} = L_h(F(x)^-)F'(x).$$

Так как $h > 0$ произвольно и по теореме Лебега F дифференцируема почти во всех $x \in \mathbf{R}$, значение $x+h$ может быть произвольным, так что функции $f_r(x)$ и $f_l(x)$ определены для всех $x \in \mathbf{R}$ и представляют собой соответственно правую и левую производную F на всей числовой прямой. Кроме того, эти функции удовлетворяют равенствам

$$f_r(x+h) = L_h(F(x))f_r(x), \tag{1.4.17}$$

$$f_l(x+h) = L_h(F(x)^-)f_l(x) \tag{1.4.18}$$

для всех $x \in \mathbf{R}$ и $h > 0$. Используя (1.4.18), заметим, что если $f_l(x_0) = 0$ в некоторой точке x_0, то $f_l = 0$ всюду на $[x_0, +\infty)$. Но $f_r = f_l = F'$ почти всюду, следовательно мы бы имели $f_r(x_1) = 0$ в некоторой точке $x_1 > x_0$, и согласно (1.4.17), тогда $f_r = 0$ всюду на $[x_1, +\infty)$. В результате, мы бы получили, что на интервале $[x_1, +\infty)$ F' существует всюду, причем $F' = 0$, то есть, F постоянна на этом интервале. Это, конечно, противоречит предположению о возрастании F.

Таким образом, $f_l(x) > 0$ для всех $x \in R$. По тем же причинам для всех $x \in R$ $f_r(x) > 0$. Теперь мы можем ввести функции $g_r = \log f_r$ и $g_l = \log f_l$ и записать (1.4.17)–(1.4.18) как

$$g_r(x+h) - g_r(x) = L_h(F(x)), \quad g_l(x+h) - g_l(x) = L_h(F(x)^-).$$

Как следствие, приращения g_r и g_l представляют собой невозрастающие функции, поэтому g_r и g_l будут обязательно вогнутыми, если показать, что они непрерывны. Для всех $x \leq y$ и всех $h > 0$ мы имеем

$$g_r(y+h) - g_r(x+h) \leq g_r(y) - g_r(x). \tag{1.4.19}$$

Априори, g_r и g_l должны быть непрерывными во всех точках некоторого множества $S \subset \mathbf{R}$ второй категории. Действительно, функция f_r является поточечным пределом

$$f_r(x) = \lim_{n\to\infty} n\left(F(x+\frac{1}{n}) - F(x)\right)$$

последовательности непрерывных функций, и то же самое относится к функции g_r. Следовательно g_r принадлежит к первому классу Бэра, и по теореме Бэра (см. напр. [20, §31]), все точки разрывности g_r образуют множество первой категории. Далее, рассуждая от противного, предположим, что g_r имеет точку разрыва x_0, то есть, выполнено по-крайней мере одно из следующих четырех условий:

$$1) \liminf_{y\to x_0^+} g_r(y) < g_r(x_0); \qquad 2) \limsup_{y\to x_0^+} g_r(y) > g_r(x_0);$$

$$3) \liminf_{y\to x_0^-} g_r(y) < g_r(x_0); \qquad 4) \limsup_{y\to x_0^-} g_r(y) > g_r(x_0).$$

В первом случае, устремляя в (1.4.19) $y \to x_0$ справа, мы получим для всех $h > 0$

$$\liminf_{y\to x_0^+} g_r(y+h) < g_r(x_0+h)$$

и так как $x+h$ может быть любым числом в $(x_0, +\infty)$, это будет противоречить непрерывности g_r во всех точках S. Во втором случае, беря $x = x_0 - h$ и устремляя в (1.4.19) $y \to x_0 - h$ справа, мы получим для всех $h > 0$

$$\limsup_{y\to(x_0-h)^+} g_r(y) < g_r(x_0-h),$$

то есть, g_r будет разрывной справа во всех точках $(-\infty, x_0)$, что снова противоречит непрерывности g_r во всех точках S. Поменяем теперь местами роль x и y в (1.4.19): для всех $y \leq x$ и всех $h > 0$ мы имеем

$$g_r(y+h) - g_r(x+h) \geq g_r(y) - g_r(x). \tag{1.4.20}$$

Применяя (1.4.20) к случаям 3) и 4), точно также получим разрывы слева во всех точках полуосей $(-\infty, x_0)$ и $(x_0, +\infty)$, соответственно.

Таким образом, функция g_r и (по тем же причинам) g_l непрерывны на всей числовой прямой. Следовательно эти функции вогнуты. Так как они непрерывны и $f_r = f_l$ почти всюду, заключаем, что $f_r(x) = f_l(x) = F'(x)$ для всех $x \in \mathbf{R}$. Поэтому производная $f = F'$ представляет собой положительную плотность μ, такую что функция $\log f$ вогнута.

Теперь доказательство полное.

§ 1.5. Функциональная форма изопериметрического неравенства для гауссовской меры

Напомним, что стандартную гауссовскую меру в $\mathbf{R}^n$ мы обозначили через γ_n. Как обычно,

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}, \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\, dt, \quad x \in [-\infty, +\infty],$$

обозначают соответственно плотность и функцию распределения γ_1. Пусть $\Phi^{-1} : [-\infty, +\infty] \to [0,1]$ – обратная к Φ.

Изопериметрическая теорема для меры γ_n утверждает, что для всех измеримых множеств $A \subset \mathbf{R}^n$ и $h > 0$

$$\gamma_n(A^h) \geq \Phi(\Phi^{-1}(\gamma_n(A)) + h) \tag{1.5.1}$$

(h-окрестность понимается в смысле евклидовой метрики). Эквивалентно,

$$\gamma_n^+(A) \geq \varphi(\Phi^{-1}(\gamma_n(A))). \tag{1.5.2}$$

С учетом того, что на полупространствах (1.5.1)-(1.5.2) превращаются в равенства, для изопериметрических функций меры γ_n мы имеем выражения

$$R_{h,\gamma_n}(p) = \Phi(\Phi^{-1}(p) + h), \quad I_{\gamma_n}(p) = \varphi(\Phi^{-1}(p)),$$

$0 \leq p \leq 1$, $h > 0$. Поскольку эти функции не зависят от размерности, будем обозначать их просто $R_{h,\gamma}$ и I_γ. Применим теорему 1.4.1:

Теорема 1.5.1. Для любой локально липшицевой функции g на $\mathbf{R}^n$ со значениями в $[0,1]$

$$I_\gamma(\mathbf{E}g) - \mathbf{E}I_\gamma(g) \leq \mathbf{E}|\nabla g|, \tag{1.5.3}$$

где математические ожидания помимаются в смысле меры γ_n. Кроме того, (1.5.3) влечет (1.5.1) и (1.5.2).

Доказательство. Нужно лишь проверить, что выполняется свойство (1.4.6). Так как φ симметрична относительно 0, то согласно лемме 1.4.4, достаточно проверить, что функция $u = \log(\varphi/\Phi)$ вогнута. Имеем: $u'(x) = -x - \varphi(x)/\Phi(x)$, и

$$u''(x) = -1 + \frac{x\varphi(x)\Phi(x) + \varphi(x)^2}{\Phi(x)^2} \leq 0$$

тогда и только тогда, когда $v(x) = \Phi(x)^2 - x\varphi(x)\Phi(x) - \varphi(x)^2 \geq 0$. Заметим, что для всех $x \in \mathbf{R}$

$$v'(x) = \varphi(x)\left[(1+x^2)\Phi(x) + x\varphi(x)\right] \geq 0, \tag{1.5.4}$$

так как для отрицательных $x = -t$, $t \geq 0$, (1.5.4) – это хорошо известное неравенство $1 - \Phi(t) \geq (t/(1+t^2))\,\varphi(t)$. Следовательно v не убывает, и остается заметить, что $v(-\infty) = 0$.

Замечания.

1) Вместо (1.4.6) можно сразу проверять, причем на основе (1.5.1) для размерности $n = 2$, что $R_{h,\gamma}$ является мультипликативным модулем: если взять

$$\begin{aligned} A_1(p) &= \{x \in \mathbf{R}^2 : x_1 \leq \Phi^{-1}(p)\}, \\ A_2(q) &= \{x \in \mathbf{R}^2 : x_2 \leq \Phi^{-1}(q)\}, \\ A(p,q) &= A_1(p) \cap A_2(q), \end{aligned}$$

то, применяя (1.5.1) с учетом того, что $A(p,q)^h \subset A_1(p)^h \cap A_2(q)^h$ и $\gamma_2(A(p,q)) = pq$, мы получим

$$\begin{aligned} R_{h,\gamma}(p)R_{h,\gamma}(q) &= \gamma_2(A_1(p)^h)\gamma_2(A_2(q)^h) \\ &= \gamma_2(A_1(p)^h \cap A_2(q)^h) \\ &\geq \gamma_2(A(p,q)^h) \geq R_{h,\gamma}(pq). \end{aligned}$$

2) При $n = 1$ (1.5.1) и (1.5.2) – частные случаи теоремы 1.2.2, и мы получаем одномерный вариант (1.5.3), используя лишь симметричность и субаддитивность функции I_γ. С другой стороны, по теореме Эрхарда [126], если g^* зависит только от переменной x_1, не убывает по x_1 и имеет такое же распределение, что и функция g, то $\mathbf{E}|\nabla g^*| \leq \mathbf{E}|\nabla g|$. Таким образом можно было бы свести (1.5.3) к размерности $n = 1$ или, иначе говоря, теорема Эрхарда влечет изопериметрическое свойство полупространств (и обратно). Отметим, что теорема Эрхарда представляет собой гауссовский аналог известного утверждения для меры Лебега (см. Бразерс и Цимер [95]).

3) Не известно, можно ли усилить (1.5.1), если ограничиться абсолютно-выпуклыми множествами (см. [21], [176]). Интересной и в то же время трудной является и задача об обращении (1.5.1) в классе выпуклых множеств A. Например, легко получить оценку $\gamma_n^+(A) \leq c\,n^{1/2}$ ([68]). Это неравенство было усилено Боллом [63]: $\gamma_n^+(A) \leq 4\,n^{1/4}$. Вопрос об оценивании сверху величины $\gamma_n^+(A)$ связан с некоторыми вероятностными задачами.

§ 1.6. Однородные неравенства типа Соболева

Пусть (M,ρ) – метрическое пространство, снабженное (борелевской) вероятностной мерой μ. Здесь мы остановимся на других примерах представления изопериметрических неравенств в форме аналитических неравенств типа Соболева. Именно, нас будут интересовать неравенства вида

$$L(g) \leq \mathbf{E}|\nabla g|, \tag{1.6.1}$$

где L – некоторый однородный функционал, и g – произвольная липшицева функция на M, входящая в область определения L. В отличие от неоднородных функционалов $L(g) = I(\mathbf{E}g) - \mathbf{E}I(g)$, рассмотренных ранее, здесь мы не будем иметь ограничений типа $0 \leq g \leq 1$. С другой стороны, исследуя некоторые частные варианты (1.6.1), мы рассчитываем расширить класс мер μ, найдя условия, при которых (1.6.1) выполняется, причем на индикаторных функциях превращается в (точное) изопериметрическое неравенство (то есть, несет в себе информацию об экстремальных множествах в дифференциальной изопериметрической задаче для меры μ).

Широкий класс функционалов L в (1.6.1) был рассмотрен Ротхаузом [206]. Именно, пусть G – непустое семейство пар (u_1, u_2) суммируемых по мере μ функций на M. Положим

$$L(g) = \sup_{(u_1,u_2)\in G} \mathbf{E}(g^+ u_1 + g^- u_2), \tag{1.6.2}$$

где $g^+ = \max(g,0)$, $g^- = \max(-g,0)$. Значение $L(g)$, конечное или нет, корректно определено для всех g, таких что g^+u_1 и g^-u_2 μ-суммируемы, как только $(u_1,u_2) \in G$. В частности, если $u_1 = -u_2$, то (1.6.2) превращается в функционал вида

$$L(g) = \sup_{u\in G} \mathbf{E}gu, \tag{1.6.3}$$

где супремум берется по некоторому (формально другому) семейству G μ-суммируемых функций u. Уже этот частный случай включает в себя многие важные функционалы. Например, в качестве L можно рассматривать L^α-норму

$$L(g) = \|g\|_\alpha = \left(\mathbf{E}|g|^\alpha\right)^{1/\alpha}, \quad 1 \leq \alpha \leq +\infty.$$

Более общо, если $(B, \|\cdot\|)$ – банахово пространство измеримых функций на M (с обычным отождествлением функций, совпадающих на множестве μ-меры 1) со свойствами

(i) $(|f| \leq |g|$ п.н. и $g \in B) \Rightarrow (f \in B$ и $\|f\| \leq \|g\|)$;

(ii) для любой невозрастающей последовательности функций $\{g_n\} \subset B$, сходящейся п.н. к функции $g \in B$, $\|g_n\| \to \|g\|$,

то норма $L(g) = \|g\|$ представима в виде (1.6.3) (свойство (i) определяет B как идеальное банахово пространство (по другой терминологии – K-пространство), и в этом случае свойство полунепрерывности нормы (ii) является также и необходимым для представимости нормы в виде (1.6.3), см. [16]).

Конечно, функционал $L(g) = \|g\|$ нельзя рассматривать в (1.1.6) для всех g и следует функции g каким-либо образом центрировать, например, предполагая, что $\mathbf{E}g = 0$. Это эквивалентно (1.1.6) с функционалом $L(g) = \|g - \mathbf{E}g\|$, который также, как и модуль градиента, инвариантен относительно сдвигов $g \to g + const$. Очевидно, что если норма в B представима в виде (1.6.3), то в этом виде представим и функционал $L(g) = \|g - \mathbf{E}g\|$.

Важным примером служит пространство Орлича $B = L_\Psi(M, \mu)$ всех измеримых функций g на M с конечной нормой

$$\|g\|_\Psi = \inf\left\{\lambda > 0 : \mathbf{E}\Psi(g/\lambda) \leq 1\right\},$$

где $\Psi : \mathbf{R} \to [0, +\infty)$ – (произвольная) четная выпуклая функция, такая что $\Psi(0) = 0$, $\Psi(x) > 0$ при $x > 0$. Такие функции мы будем называть функциями Юнга (называемые иногда в литературе также функциями Орлича). Норма в этом идеальном банаховом пространстве представима в виде (1.6.2), и мы будем соответственно рассматривать в (1.6.1) функционал $L(g) = \|g - \mathbf{E}g\|_\Psi$.

Примером функционала, представимого в виде (1.6.2), но не представимого в виде (1.6.3) может служить т.н. энтропия

$$L(g) = \mathbf{E}|g| \log |g| - \mathbf{E}|g| \log \mathbf{E}|g| = \sup_{\mathbf{E}e^u \le 1} \mathbf{E}|g|u.$$

Именно этот пример приводит Ротхауз, вводя более широкий по сравнению с (1.6.3) класс функционалов.

Имеет место:

Теорема 1.6.1. Пусть L определен с помощью (1.6.2). Следующие условия эквивалентны:

a) для всех измеримых подмножеств $A \subset M$

$$\mu^+(A) \ge \max(L(1_A), L(-1_A)); \tag{1.6.4}$$

b) для всех функций g на M, имеющих конечную липшицеву норму на каждом шаре в M и входящих в область определения L,

$$L(g) \le \mathbf{E}|\nabla g|. \tag{1.6.5}$$

Для римановых многообразий M (с канонической римановой метрикой и мерой Лебега) эта теорема, причем без предположения о конечности меры μ (что, конечно, не существенно в теореме) была доказана Ротхаузом [206]. В частности, она обобщает утверждение, доказанное Федерером и Флемингом [128] и Мазья [24] об эквивалентности классического неравенства Соболева и классического изопериметрического неравенства в евклидовом пространстве. Основным аргументом в таком утверждении служит формула Кронрода–Федерера для интеграла от модуля градиента (т.н. coarea-формула, см. напр. [12], [18], [25], [43])

$$\mathbf{E}|\nabla g| = \int_{-\infty}^{\infty} \mu^+\{g > t\}\, dt,$$

часто используемая при доказательстве различных неравенств Соболева, включающих L^α-норму градиента (заметим, однако, что доказательство теоремы 1.3.1 было основано на других идеях). В действительности в формуле Кронрода-Федерера используется лишь неравенство (см. лемму 2.6.1), а оно, как оказывается, справедливо не только для римановых многообразий, но и для произвольных метрических пространств. Чтобы исследовать интересующие нас вопросы в максимальной общности, мы докажем теорему 1.6.1 в таком абстрактном виде.

Приведем несколько примеров.

Если $L(g) = c\|g - \mathbf{E}g\|_\alpha$, $1 \le \alpha \le +\infty$, $c > 0$, то согласно теореме 1.6.1, изопериметрическое неравенство

$$\mu^+(A) \ge c\,(p^\alpha q + pq^\alpha)^{1/\alpha}, \quad p = \mu(A),\ q = 1 - p, \tag{1.6.6}$$

эквивалентно аналитическому неравенству

$$c\|g - \mathbf{E}g\|_\alpha \le \mathbf{E}|\nabla g|. \tag{1.6.7}$$

Предположим, что мера μ не имеет атомов. В этом случае изопериметрическая функция I_μ определена на всем интервале $[0,1]$, и (1.6.6) запишется как неравенство $I_\mu(p) \ge c I_\alpha(p)$, $0 \le p \le 1$, где

$$I_\alpha(p) = (p^\alpha q + pq^\alpha)^{1/\alpha} \quad \text{при} \quad 1 \le \alpha < +\infty,$$

и $I_\infty(p) = \max(p,q)$ при $\alpha = +\infty$. Таким образом, в том и только в том случае, когда I_μ имеет вид cI_α, (1.6.7) эквивалентно точному изопериметрическому неравенству и может содержать в себе информацию об экстремальных множествах в дифференциальной изопериметрической задаче для меры μ.

При $\alpha = 1$ $I_1(p) = 2pq$ – с точностью до параметра масштаба изопериметрическая функция логистического распределения на прямой. Она удовлетворяет условиям теоремы 1.4.1, и поэтому изопериметрическое неравенство (1.6.6) допускает неоднородную функциональную форму (1.4.8)

$$2c\,\mathrm{Var}(g) \le \mathbf{E}|\nabla g|, \quad 0 \le g \le 1, \tag{1.6.8}$$

и в то же время – однородную функциональную форму (1.6.7)

$$c\mathbf{E}|g - \mathbf{E}g| \le \mathbf{E}|\nabla g|. \tag{1.6.9}$$

Следовательно (1.6.8) и (1.6.9) эквивалентны. Для функций вида $I = cI_\alpha$ это единственный случай "пересечения" теорем 1.4.1 и 1.6.1. Действительно, при $\alpha > 1$ распределение F_α, ассоциированное с I_α, имеет компактный носитель, так как интеграл $\int_0^1 dp/I_\alpha(p)$ конечен. Например, при $\alpha = 2$ мы имеем $I_2(p) = \sqrt{pq}$. В этом случае ассоциированное распределение F_2 сосредоточено на интервале $|x| < \frac{\pi}{2}$ и имеет там плотность $\frac{dF_2(x)}{dx} = \frac{\cos x}{2}$.

Интересно проследить за поведением функций I_α с ростом α. Поскольку $I_\alpha(p) = \|\xi - \mathbf{E}\xi\|_\alpha$, где ξ – бернуллиевская случайная величина, принимающая значения 1 и 0 с вероятностями p и q соответственно, эти функции возрастают с ростом α. При $1 \le \alpha \le 3$ эти функции вогнуты (см. [78]), поэтому ассоциированные распределения F_α логарифмически вогнуты. При $\alpha > 3$ это уже не так и, более того, $p = 1/2$ не будет точкой максимума функций I_α. Тем не менее, I_α не перестает быть субаддитивной, и следовательно F_α удовлетворяют условиям теоремы 1.2.2 при всех α; в частности, I_α являются изопериметрическими функциями для F_α. При $\alpha = +\infty$, это распределение упоминалось в замечании 1.2.2.

Как уже отмечалось, I_2 является изопериметрической функцией и для равномерного распределения на двумерной сфере $M = S^2 \subset \mathbf{R}^3$ радиуса 1. Поэтому функциональная форма (1.6.7)

$$\sqrt{\mathrm{Var}(g)} \le \mathbf{E}|\nabla g|$$

выражает экстремальное свойство шаров в изопериметрической задаче на сфере S^2. Однако, для сфер S^n при $n > 2$ (1.6.7) уже не будет эквивалентным изопериметрическому неравенству на сфере, и следует рассматривать функционалы $L(g)$ более общего вида.

Лемма 1.6.1. Для любой липшицевой функции g на M (то есть, такой, что $\|g\|_{Lip} < +\infty$)

$$\mathbf{E}|\nabla g| \;\geq \int_{-\infty}^{\infty} \mu^+\{g > t\}\, dt. \tag{1.6.10}$$

Нетрудно видеть, что под интегралом в (1.6.10) стоит измеримая функция.

Следствие 1.6.1. Для любой липшицевой функции g на M, такой что $\mu\{g = 0\} = 0$,

$$\mathbf{E}|\nabla g| \;\geq \int_{-\infty}^{0} \mu^+\{g < t\}\, dt + \int_{0}^{\infty} \mu^+\{g > t\}\, dt. \tag{1.6.11}$$

Чтобы вывести (1.6.11), достаточно применить (1.6.10) к g^+ и g^- и заметить, что $|\nabla g| = |\nabla g^+|$ и $|\nabla g| = |\nabla g^-|$ на (открытых) множествах $\{g > 0\}$ и $\{g < 0\}$.

Доказательство леммы 1.6.1. Пусть сначала g ограничена. Так как (1.6.10) не изменится при добавлении к g постоянного слагаемого, можно считать $g \geq 0$. Так же, как и в доказательстве теоремы 1.4.1, введем функции $U_h g(x) = \sup\{g(y) : \rho(x, y) < h\}$, $x \in M$, $h > 0$, так что

$$\limsup_{h \to 0^+} \frac{U_h g(x) - g(x)}{h} \leq |\nabla g(x)|. \tag{1.6.12}$$

Рассмотрим $A_t = \{g > t\}$. Для всех $t, h > 0$ $\{U_h g > t\} = A_t^h$, поэтому $\mathbf{E}\, U_h g = \int_0^{+\infty} \mu(A_t^h)\, dt$. Следовательно

$$\mathbf{E}\, \frac{U_h g - g}{h} \;= \int_0^{+\infty} \frac{\mu(A_t^h) - \mu(A_t)}{h}\, dt. \tag{1.6.13}$$

В силу условия липшицевости, $U_h g(x) - g(x) \le ch$ для всех $x \in M$, $h > 0$ и некоторой постоянной $c \ge 0$. Поэтому, используя (1.6.12), теорему Лебега о мажорируемой сходимости, (1.6.13) и лемму Фату, получаем:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}|\nabla g| &\ge \limsup_{h\to 0^+} \mathbf{E}\,\frac{U_h g - g}{h} \ge \liminf_{h\to 0^+} \mathbf{E}\,\frac{U_h g - g}{h} \\
&= \liminf_{h\to 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{\mu(A_t^h) - \mu(A_t)}{h}\,dt \\
&\ge \int_0^{+\infty} \liminf_{h\to 0^+} \frac{\mu(A_t^h) - \mu(A_t)}{h}\,dt = \int_0^{+\infty} \mu^+(A_t)\,dt.
\end{aligned}$$

Таким образом, (1.6.10) доказано для ограниченных липшицевых функций g. Для неограниченных липшицевых g можно применить (1.6.10) к усечениям $g_n = \max\{-a_n, \min\{a_n, g\}\}$ с последовательностью $a_n \to +\infty$, такой что $\mu\{|g| = a_n\} = 0$. Тогда мы получим $\int_{\{|g|<a_n\}} |\nabla g|\,d\mu \ge \int_{-a_n}^{a_n} \mu^+\{g > t\}\,dt$. Применяя теорему Тонелли о монотонной сходимости, приходим к требуемому утверждению.

Доказательство теоремы 1.6.1.

a) $\Rightarrow$ *b*): по самому определению (1.6.2), достаточно рассматривать функционал вида $L(g) = \mathbf{E}(g^+ u_1 + g^- u_2)$, порожденный одноэлементным семейством $G = \{(u_1, u_2)\}$. По условию, функции u_1, u_2, а также $g^+ u_1$ и $g^- u_2$ суммируемы.

Шаг 1: g имеет конечную липшицеву норму. Предположим, что $\mu\{g = 0\} = 0$. В силу следствия 1.6.1, полагая $A_t = \{g > t\}$, $B_t = \{g < t\}$ и применяя к этим множествам (1.6.4), имеем

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}|\nabla g| &\ge \int_0^{+\infty} L(1_{A_t})\,dt + \int_{-\infty}^0 L(-1_{B_t})\,dt \\
&= \int_0^{+\infty} \mathbf{E}\,1_{A_t}\,u_1\,dt + \int_{-\infty}^0 \mathbf{E}\,1_{B_t}\,u_2\,dt \\
&= \mathbf{E}\int_0^{+\infty} 1_{A_t}\,u_1\,dt + \mathbf{E}\int_{-\infty}^0 1_{B_t}\,u_2\,dt \\
&= \mathbf{E}\,1_{A_0}\,g\,u_1 + \mathbf{E}\,1_{B_0}\,g\,u_2 = \mathbf{E}\,g^+ u_1 + \mathbf{E}\,g^- u_2 = L(g).
\end{aligned}$$

Заметим, что мы воспользовались теоремой Фубини, изменяя порядок интегрирования, что возможно в силу суммируемости функций g^+u_1 и g^-u_2: в этом случае

$$\mathbf{E}\int_0^{+\infty} 1_{A_t}|u_1|\,dt = \mathbf{E}g^+|u_1| < +\infty,$$
$$\mathbf{E}\int_{-\infty}^{0} 1_{B_t}|u_2|\,dt = \mathbf{E}g^+|u_2| < +\infty.$$

Теперь, чтобы избавиться от условия $\mu\{g=0\}=0$, просто применим (1.6.5) к функциям $g-\varepsilon$, выбирая $\varepsilon \neq 0$ сколь угодно малыми, но такими, что $\mu\{g=\varepsilon\}=0$. В пределе получим (1.6.5) для функции g.

Шаг 2: g имеет конечную липшицеву норму на всех шарах в M и, кроме того, ограничена. В этом случае можно применить (1.6.5) к "усечениям" $g_r = gT_r$, которые мы использовали в доказательстве теоремы 1.4.1. Так как $0 \le T_r \le 1$, функции g_r входят в область определения L, и по теореме Лебега $L(g_r) \to L(g)$ при $r \to +\infty$. С учетом (1.4.11) (здесь и используется ограниченность g), получаем в пределе (1.6.5) для g.

Шаг 3: общий случай. Как и в доказательстве леммы 1.6.1, аппроксимируем g функциями $g_n = \max\{-a_n, \min\{a_n, g\}\}$. По теореме Лебега, $L(g_n) \to L(g)$ при $n \to \infty$, и так же, как и в лемме 1.6.1, $\mathbf{E}|\nabla g_n| \to \mathbf{E}|\nabla g|$.

b) $\Rightarrow$ *a)*: случаи $\mu(A)=0$ и $\mu(A)=1$ тривиальны, и можно считать, что $0<\mu(A)<1$. Если $\mu(\overline{A}) > \mu(A)$, то $\mu^+(A) = +\infty$, и доказывать нечего. Пусть $\mu(\overline{A}) = \mu(A)$, так что $\mu^+(A) = \mu^+(\overline{A})$. По условию, для любой ограниченной липшицевой функции $g \ge 0$ на M и всех $(u_1,u_2) \in G$

$$\mathbf{E}|\nabla g| \ge \mathbf{E}gu_1, \quad \mathbf{E}|\nabla g| = \mathbf{E}|\nabla(-g)| \ge \mathbf{E}gu_2. \tag{1.6.14}$$

По лемме 1.4.1, существует последовательность g_n липшицевых функций на M со значениями в [0,1], поточечно сходящихся к $1_{\overline{A}}$,

таких что
$$\limsup_{n\to\infty} \mathbf{E}|\nabla g_n| \le \mu^+(A). \tag{1.6.15}$$
Применяя (1.6.14) к g_n и используя (1.6.15), мы получим в пределе
$$\mu^+(A) \ge \mathbf{E}1_A u_1, \quad \mu^+(A) \ge \mathbf{E}1_A u_2.$$
Беря супремум по всем $(u_1, u_2) \in G$, приходим к неравенствам $\mu^+(A) \ge L(1_A)$, $\mu^+(A) \ge L(-1_A)$, то есть, к (1.6.4).

Теорема 1.6.1 доказана.

§ 1.7. Однородные неравенства типа Соболева в пространствах Орлича

Снова пусть (M, ρ, μ) – метрическое пространство с вероятностной мерой. Будем предполагать, что мера μ не имеет атомов, так что ее изопериметрическая функция I_μ определена на $[0,1]$.

Применим теорему 1.6.1 к функционалу $L(g) = \|g - \mathbf{E}g\|_\Psi$, где Ψ – некоторая функция Юнга: изопериметрическое неравенство

$$\mu^+(A) \geq I_\Psi(p), \quad p = \mu(A), \tag{1.7.1}$$

эквивалентно аналитическому неравенству

$$\|g - \mathbf{E}g\|_\Psi \leq \mathbf{E}|\nabla g|, \tag{1.7.2}$$

где $I_\Psi(p) = \|1_A - p\|_\Psi$. В (1.7.2) g – произвольная суммируемая функция, имеющая конечную липшицеву норму на всех шарах в M, причем согласно теореме 1.6.1, $g \in L_\Psi(M, \mu)$, как только $\mathbf{E}|\nabla g| < +\infty$.

Функция I_Ψ представляет собой некоторый аналог фундаментальной функции $p \to \|1_A\|$. По определению нормы пространства Орлича, число $\lambda = I_\Psi(p)$ при $0 < p < 1$ является положительным корнем уравнения $p\Psi\left(\frac{q}{\lambda}\right) + q\,\Psi\left(\frac{p}{\lambda}\right) = 1$, где $q = 1 - p$, и, кроме того, $I_\Psi(0) = I_\Psi(1)$. Если мы хотим, чтобы (1.7.2) было равносильно точному изопериметрическому неравенству, следует, согласно (1.7.1), выбрать Ψ такой, чтобы $I_\Psi = I_\mu$, то есть, чтобы при $0 < p < 1$ функция $I(p) = I_\mu(p)$ была положительна и удовлетворяла уравнению

$$p\Psi\left(\frac{q}{I(p)}\right) + q\,\Psi\left(\frac{p}{I(p)}\right) = 1, \quad q = 1 - p. \tag{1.7.3}$$

Естественный вопрос: когда такая функция Юнга существует?

Теорема 1.7.1. Пусть I – положительная функция, заданная на (0,1). Для того, чтобы существовала функция Юнга Ψ, удовлетворяющая (1.7.3), необходимо и достаточно, чтобы

1) $I(0^+) = I(1^-) = 0$;

2) $I(p) = I(1-p)$ для всех $p \in (0,1)$;

3) функция $p(1-p)/I(p)$ была вогнута на $(0,1)$.

Таким образом, свойство экстремальности множеств в изопериметрической задаче для меры μ в M можно выразить как неравенство Соболева вида (1.7.2) в том и только в том случае, когда изопериметрическая функция I_μ обладает свойствами 1) – 3).

Заметим, что эти свойства полностью описывают класс всех функций вида $I_\Psi(p) = \|1_A - p\|_\Psi$. Представляя A в виде обьединения двух непересекающихся множеств меры p_1 и p_2, сразу получаем неравенство $I_\Psi(p_1+p_2) \le I_\Psi(p_1) + I_\Psi(p_2)$, то есть, свойство субаддитивности. Поэтому, в силу теоремы 1.2.2, функция I_Ψ будет изопериметрической функцией ассоциированного с I_Ψ распределения на прямой.

Функции Юнга Ψ, удовлетворяющие (1.7.3) (в том случае, если они существуют), определяются неоднозначно. Например, для функции $I(p) = p(1-p)$ все такие Ψ описываются соотношением $\Psi(x) = (1-2a)+a|x|$ при $|x| \ge 1$, где $a \in (0,1)$ – произвольный параметр, причем на интервале $[-1,1]$ Ψ может определяться произвольно, но так, чтобы она оставалась функцией Юнга. Для функции $I(p) = \sqrt{p(1-p)}$ можно взять $\Psi(x) = x^2$, но можно взять и функцию (см. замечание 1.7.1)

$$\Psi(x) = \begin{cases} |x| & \text{при} \quad |x| \le 1, \\ 1-|x|+x^2 & \text{при} \quad |x| \ge 1. \end{cases}$$

Однако, несмотря на столь широкий выбор, все такие Ψ порождают одинаковые пространства Орлича L_Ψ в том смысле, что их нормы будут эквивалентными. Можно сделать более точное утверждение.

Обозначим через $W(M,\mu)$ линейное пространство всех суммируемых функций на M, имеющих конечную липшицеву норму на всех шарах в M и нулевое среднее $\mathbf{E}g = 0$. Введем в $W(M,\mu)$ полунорму $\|g\|_W = \mathbf{E}|\nabla g|$. Эта полунорма будет заведомо нормой, если, как и в L_Ψ, мы будем отождествлять функции, совпадающие на множестве μ-меры 1 (и в предположении, что выполняется (1.7.2)). Вопросы пополнения мы не обсуждаем.

Следствие 1.7.1. Предположим, что изопериметрическая функция $I = I_\mu$ удовлетворяет свойствам 1)-3), и Ψ – функция Юнга, удовлетворяющая (1.7.3). Тогда $L_\Psi(M,\mu)$ – наименьшее среди всех пространств Орлича, содержащих $W(M,\mu)$ как вложенное подпространство.

Последнее означает, что если $W(M,\mu) \subset L_{\Psi_1}(M,\mu)$, причем норма в $W(M,\mu)$ сильнее, чем норма в $L_{\Psi_1}(M,\mu)$, то и норма в $L_\Psi(M,\mu)$ сильнее, чем норма в $L_{\Psi_1}(M,\mu)$. В этом смысле существует единственное минимальное пространство Орлича, содержащее в себе "пространство Соболева" $W(M,\mu)$ как вложенное.

Используя теорему 1.7.1, можно доказать следующее утверждение. Обозначим через $S^n(r) \subset \mathbf{R}^{n+1}$ n-мерную сферу радиуса $r > 0$, и пусть σ_n – равномерное распределение (нормированная мера Лебега) на $S^n(r)$. Изопериметрическое свойство шаров на сфере означает, что для всех измеримых множеств $A \subset S^n(r)$

$$\sigma_n^+(A) \geq \sigma_n^+(B),$$

где B – (любой) шар на $S^n(r)$ такой же σ_n-меры, что и A. Это можно записать как утверждение об изопериметрической функции меры σ_n:

$$I_{\sigma_n}(p) = \sigma_n^+(B), \tag{1.7.4}$$

где B – шар на $S^n(r)$ меры $p = \sigma_n(B)$.

Теорема 1.7.2. При $n \geq 2$ изопериметрическое свойство шаров на сфере $S^n(r)$ можно эквивалентно представить как неравенство типа Соболева (1.7.2) с подходящей функцией Юнга Ψ.

Как предельный случай теоремы 1.7.2 выступает

Теорема 1.7.3. Гауссовское изопериметрическое неравенство (1.5.2), выражающее изопериметрическое свойство полупространств в $(\mathbf{R}^n, \gamma_n)$, можно эквивалентно представить как неравенство типа Соболева (1.7.2) с подходящей функцией Юнга Ψ.

Случай окружности ($n = 1$) не охватывается теоремой 1.7.2. Действительно, $I_{\sigma_1}(p) = \frac{1}{\pi r}$ – постоянная функция на (0,1), следовательно не удовлетворяющая свойству 1). При $n \geq 2$ свойства 1) – 2) очевидны, и требуется лишь проверить, что:

Лемма 1.7.1. Функция $\frac{pq}{I_{\sigma_n}(p)}$, $q = 1 - p$, вогнута на (0,1).

При $n = 2$ это утверждение тоже очевидно, так как $I_{\sigma_2}(p) = \frac{\sqrt{pq}}{r}$. При $n \geq 3$ $I_{\sigma_n}(p)$ не имеет такого явного аналитического выражения, и доказательство леммы 1,7,1 становится очень громоздким; оно будет приведено в приложении. Отметим, что при $p \to 0$ $I_{\sigma_n}(p)$ ведет себя с точностью до множителя как $p^{n/(n-1)}$, поэтому соответствующее пространство $L_\Psi(S^n(r), \sigma_n)$ из следствия 1.7.1 изоморфно пространству Лебега $L^{n/(n-1)}(\sigma_n)$.

Легко проверить, что для сфер радиуса $r_n = \sqrt{n}$ $I_{\sigma_n}(p) \to I_\gamma(p)$ при $n \to \infty$, где $I_\gamma(p) = \varphi(\Phi^{-1}(p))$ – изопериметрическая функция меры γ_n (см. § 1.5). Поэтому лемма 1.7.1 влечет свойство 3) для $I = I_\gamma$ и значит теорему 1.7.3. Можно дать и прямое доказательство (оно приводится в конце этого параграфа). Легко также проверить, исходя из (1.7.3), что пространство $L_\Psi(\mathbf{R}^n, \gamma_n)$ из следствия 1.7.1 изоморфно пространству Орлича $L_{\Psi_1}(\mathbf{R}^n, \gamma_n)$ с функцией Юнга $\Psi_1(x) = |x|\sqrt{\log(1 + |x|)}$, $x \in \mathbf{R}$. Однако, сама функция Ψ_1 не удовлетворяет (1.7.3).

Приступим к доказательству теоремы 1.7.1. Обозначим через $x = x_p$ положительный корень уравнения

$$p\,\Psi(qx) + q\,\Psi(px) = 1, \quad q = 1 - p, \tag{1.7.5}$$

где Ψ – некоторая функция Юнга.

Лемма 1.7.2. Функция $y(p) = px_p$ непрерывна и (строго) возрастает на (0,1).

Доказательство. Непрерывность очевидна. Покажем, что y возрастает. Функция $T(x) = \Psi(x)/x$ положительна и не убывает на $(0, +\infty)$. В силу (1.7.5),

$$\begin{aligned} p\,\Psi(qx_p) + q\,\Psi(px_p) &= pqx_p(T(qx_p) + T(px_p)) \\ &= qy(p)\left(T\left(\frac{qy(p)}{p}\right) + T(y(p))\right) = 1. \end{aligned} \tag{1.7.6}$$

Допустим, что для некоторых $0 < p_1 < p_2 < 0$ $y(p_1) \geq y(p_2)$, и пусть $q_1 = 1 - p_1$, $q_2 = 1 - p_2$. Тогда $q_1 > q_2$, $q_1/p_1 > q_2/p_2$, и поэтому

$$T\left(\frac{q_1 y(p_1)}{p_1}\right) \geq T\left(\frac{q_2 y(p_2)}{p_2}\right), \quad T(y(p_1)) \geq T(y(p_2)),$$

Сравнивая (1.7.6) при $p = p_1$ и $p = p_2$, получаем противиречие $1 > 1$.

Лемма 1.7.3. Если положительная функция I удовлетворяет свойствам $1) - 3)$, то функция $y(p) = p/I(p)$ возрастает на $(0, 1)$.

Доказательство. По условию, функция $z(p) = pq/I(p)$, $q = 1-p$, вогнута на $(0, 1)$, поэтому значение $z(0^+)$ конечно и неотрицательно. Пусть z' – невозрастающая производная Радона-Никодима функции z. Так как $y(p) = z(q)/q$,

$$y(p) = \frac{z(0^+)}{q} + \int_0^1 z'(tq)\,dt, \quad 0 < p < 1.$$

Функции $p \to \dfrac{1}{q}$ и $p \to z'(tq)$ не убывают, поэтому не убывает и функция y. Более того, если $z(0^+) > 0$, то y (строго) возрастает в силу возрастания функции $p \to \dfrac{1}{q}$. Рассмотрим случай $z(0^+) = 0$, когда

$$y(p) = \int_0^1 z'(tq)\,dt.$$

Допустим $y(p_0) = y(p_1)$ для некоторых $0 < p_1 < p_0 < 1$. Тогда $z'(tq_1) = z'(tq_0)$ для почти всех (в смысле меры Лебега) точек $t \in (0,1)$, где $q_0 = 1 - p_0$, $q_1 = 1 - p_1$. Но тогда, как легко видеть, z' будет постоянна на $(0, q_0)$, следовательно функция z должна иметь вид $z(s) = a + bs$ при всех $0 < s < q_0$, и так как $z(0^+) = 0$, мы бы имели $z(s) = bs$ для некоторого $b > 0$ и всех $s \in (0, q_0)$. В таком случае мы бы получили

$$I(s) = \frac{s(1-s)}{z(s)} = \frac{1-s}{b},$$

в частности, $I(0^+) = 1/b > 0$, что противоречит 1). Лемма 1.7.3 доказана.

Доказательство теоремы 1.7.1.

Необходимость. По условию, $x_p = 1/I(p)$ для всех $p \in (0,1)$. В силу (1.7.5), $x_p = x_q$, так что свойство 2) очевидно.

В силу леммы 1.7.1, функция $y(p) = px_p$ возрастает на (0,1), поэтому существует предел $\ell = \lim_{p\to 1^-} y(p)$, конечный или нет. Если $\ell < +\infty$, то записывая (1.7.5) как тождество

$$1 = p\,\Psi(y(q)) + q\,\Psi(y(p)) \tag{1.7.7}$$

и устремляя $p \to 0^+$, мы бы получили $\Psi(y(0^+)) = 1$. Но тогда, снова применяя (1.7.7), мы бы имели для всех $p \in (0,1)$

$$1 > p\,\Psi(y(0^+)) + q\,\Psi(y(0^+)) = \Psi(y(0^+)) = 1.$$

Поэтому $\ell = +\infty$, то есть, $I(p) \to 0$ при $p \to 1^-$, и значит свойство 1), с учетом симметричности I, проверено.

Остается установить 3). Введем функцию $z(p) = pq/I(p)$, где как обычно $q = 1 - p$. Запишем (1.7.5) в терминах z:

$$p\,\Psi\left(\frac{z(p)}{p}\right) + q\,\Psi\left(\frac{z(q)}{q}\right) = 1. \tag{1.7.8}$$

Покажем, что это тождество влечет вогнутость функции z. Функция Ψ как неотрицательная выпуклая функция на полуоси $[0, +\infty)$ со свойствами $\Psi(0) = 0$, $\Psi(x) > 0$ при $x > 0$, может быть представлена на $(0, +\infty)$ в форме

$$\Psi(x) = \sup_{(c,d)\in T}\,(cx - d) \tag{1.7.9}$$

для некоторого семейства $T \subset (0, +\infty) \times [0, +\infty)$ со следующим свойством: для всех $x > 0$ супремум в (1.7.9) достигается для некоторой пары $(c, d) \in T$. Замечая, что $z(p) = z(q)$ и применяя (1.7.8)–(1.7.9), получаем:

$$\begin{aligned} p\,\Psi\left(\frac{z}{p}\right) + q\,\Psi\left(\frac{z}{q}\right) &= p \sup_{(c,d)\in T}\Big(c\,\frac{z}{p} - d\Big) + q \sup_{(c',d')\in T}\Big(c'\,\frac{z}{q} - d'\Big) \\ &= \sup_{(c,d),(c',d')\in T}\,[(c + c')\,z - (dp + d'q)] \;=\; 1. \end{aligned}$$

В частности, для всех $(c, d), (c', d') \in T$ имеем $(c+c')\,z-(dp+d'q) \le 1$, то есть,

$$z \;\le \inf_{(c,d),(c',d')\in T}\,\frac{1 + dp + d'q}{c + c'}\,. \tag{1.7.10}$$

Более того, так как супремум в (1.7.9) достигается на некотором $(c, d) \in T$, инфимум в (1.7.10) тоже достигается на некоторых $(c, d), (c', d') \in T$. Следовательно знак неравенства в (1.7.10) можно заменить на знак равенства, из чего следует, что z вогнута как инфимум аффинных функций.

Достаточность. В силу леммы 1.7.2, функция $y(p) = p/I(p)$ непрерывно возрастает на $(0, 1)$, причем, в силу свойства 1), $y(1^-) = +\infty$. Поэтому $y : (0, 1) \to (c_0, +\infty)$ – возрастающая биекция, где $c_0 = y(0^+)$. Пусть $y^{-1} : (c_0, +\infty) \to (0, 1)$ – обратная функция. Без нарушения общности будем считать, что $y(1/2) = 1$, и тогда $c_0 < 1$.

Нам нужно построить выпуклую возрастающую функцию $\Psi : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, $\Psi(0^+) = 0$, удовлетворяющую (1.7.3). Сначала положим $\Psi(x) = x$ при $0 < x \leq 1$. При $x > 1$ определим $\Psi(x)$ (очевидно, единственным способом) в соответствии с уравнением (1.7.7), которое эквивалентно (1.7.3). Поскольку при $0 < p \leq 1/2$ $\Psi(y(p)) = y(p)$, (1.7.7) при таких p примет вид

$$\Psi(y(q)) = \frac{1 - qy(p)}{p}, \quad 0 < p \leq 1/2, \ q = 1 - p.$$

Следовательно, полагая $x = y(q)$, мы имеем

$$\Psi(x) = \frac{1 - y^{-1}(x)\, y\big(1 - y^{-1}(x)\big)}{1 - y^{-1}(x)}, \quad x \geq 1. \tag{1.7.11}$$

Поскольку y не убывает на $(0, \frac{1}{2})$, абсолютно непрерывна и принимает значения в $(0, 1)$, функция $u(p) = \dfrac{1 - qy(p)}{p}$ убывает на $(0, \frac{1}{2})$. Действительно, производной Радона-Никодима для u служит функция $u'(p) = \dfrac{y(p) - pqy'(p) - 1}{p^2} < 0$, где y' – неотрицательная производная Радона-Никодима для y. Поэтому функция Ψ, определенная в (1.7.11), возрастающая и непрерывная на $[1, +\infty)$ и, кроме того, $\Psi(1) = 1$.

Остается показать, что Ψ выпукла на $[1, +\infty)$ и что ее правая производная $\Psi'(1^+) \geq 1$. Для этого нам потребуется еще одно представление для функции Ψ. По условию 2), $z(p) = z(q)$, где снова $z(p) = pq/I(p)$, поэтому тождества (1.7.3) и (1.7.8) эквивалентны. При $0 < p \leq 1/2$ мы имеем $z(p)/q = y(p) \leq 1$, следовательно $\Psi(z(p)/q) = z(p)/q$, и (1.7.8) принимает вид

$$\Psi\left(\frac{z(p)}{p}\right) = \frac{1}{p} - \frac{z(p)}{p}, \quad 0 < p \leq 1/2,$$

или – в терминах функции $\delta(p) = \dfrac{z(p)}{p} = y(q)$ – мы имеем тождество

$$\Psi(\delta(p)) = \frac{1}{p} - \delta(p), \quad 0 < p \leq 1/2. \tag{1.7.12}$$

Заметим, что δ убывает на (0,1/2], причем $\delta(1/2) = 1$, $\delta(0^+) = y(1^-) = +\infty$. Введем обратную функцию $\delta^{-1} : [1, +\infty) \to (0, 1/2]$. Тогда, полагая $x = \delta(p)$, (1.7.12) может быть переписано как

$$\Psi(x) = \frac{1}{\delta^{-1}(x)} - x, \quad x \geq 1. \tag{1.7.13}$$

Следовательно Ψ будет выпуклой на интервале $x \geq 1$ тогда и только тогда, когда будет выпуклой на этом интервале функция $1/\delta^{-1}$. Так как эта функция возрастает и непрерывна на $[1, +\infty)$, причем, в силу (1.7.13), $1/\delta^{-1}(1) = 2$, $1/\delta^{-1}(+\infty) = \infty$, выпуклость $1/\delta^{-1}$ эквивалентна вогнутости функции R, обратной к ней. Найдем R. Она определена на интервале $[2, +\infty)$. При этом для всех $t \geq 2$

$$\frac{1}{\delta^{-1}(x)} = t \iff \delta^{-1}(x) = \frac{1}{t} \iff x = \delta\left(\frac{1}{t}\right) = tz\left(\frac{1}{t}\right).$$

Таким образом, $R(t) = tz(1/t)$, $t \geq 2$. По условию 3), z вогнута и значит может быть представлена в виде $z(p) = \inf_{(c,d)\in S} (cp + d)$ для некоторого $S \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Поэтому функция

$$R(t) = tz\left(\frac{1}{t}\right) = t \inf_{(c,d)\in S} \left(\frac{c}{t} + d\right) = \inf_{(c,d)\in S} (c + dt)$$

вогнута как инфимум некоторого семейства аффинных функций.

Чтобы показать, что $\Psi'(1^+) \geq 1$, нужно проверить, согласно (1.7.13), что правая производная

$$\left[\frac{1}{\delta^{-1}(x)}\right]'_{x=1^+} \;\geq\; 2,$$

или, эквивалентно, что $R'(2^+) \leq 1/2$. Как вогнутая функция, z дифференцируема во всех точках p за исключением, быть может, точек счетного множества $U \subset (0, 1)$. Для $t > 2$, таких что $1/t \notin U$, мы имеем:

$$R'(t) = \left[tz\left(\frac{1}{t}\right)\right]' = z\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{z'(1/t)}{t}. \tag{1.7.14}$$

Устремляя в (1.7.14) $t \to 2$, $t > 2$, получаем

$$R'(2^+) = z\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{z'\left((1/2)^-\right)}{2} \le z\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2},$$

поскольку, в силу свойств 2) и 3), $z'((1/2)^-) \ge 0$.

Теорема 1.7.1 доказана.

Замечание 1.7.1. В общем случае, когда $c = 2I(1/2)$ не обязательно равно 1, функция Ψ, удовлетворяющая (1.7.3), строится таким же способом, полагая

(i) $\Psi(\dfrac{1}{c}) = 1$;

(ii) $\Psi(x) = cx$ при $0 \le x \le \dfrac{1}{c}$;

(iii) $\Psi(x) = \dfrac{1}{1-q(x)} - cx$ при $x \ge \dfrac{1}{c}$, где $q(x) \in [1/2, 1)$ – единственный корень уравнения $q = I(q)\,x$.

Условие (i) вытекает из (1.7.3) при $p = 1/2$, в то время как при условии (ii), (iii) следует из (1.7.3), если положить $x = q/I(q)$, $1/2 \le q < 1$.

Допустим, что выполняются свойства 1)–3). Определим еще одну функцию Юнга Ψ_0 равенством

$$2pq\,\Psi_0\left(\frac{1}{I(p)}\right) = 1, \quad q = 1-p, \tag{1.7.15}$$

так что $\Psi_0(2/c) = 2$, причем на интервале $[0, 2/c]$ определим Ψ_0 линейно: $\Psi_0(x) = cx$. Такая функция Ψ_0 изучалась Пеллиция и Таленти [201] для гауссовской изопериметрической функции $I(p) = \varphi(\Phi^{-1}(p))$. С использованием изопериметрического неравенства (1.5.2) в $(\mathbf{R}^n, \gamma_n)$ ими было доказано аналитическое неравенство

$$\|g - \mathbf{E}g\|_{\Psi_0} \le \mathbf{E}|\nabla g|. \tag{1.7.16}$$

В отличие от функции Ψ, определенной выше условиями $(i)-(iii)$, Ψ_0 определяется явно, и это делает ее более привлекательной с точки зрения неравенства (1.7.16) как возможной функциональной формы для (1.5.2). Покажем, однако, что (1.7.16) с функцией Ψ_0, определенной в (1.7.15), не может выступать в качестве функциональной формы не только для (1.5.2), но и в общем случае – для изопериметрического неравенства $\mu^+(A) \geq I(\mu(A))$ в предположении, что I обладает свойствами 1)-3), и функция Ψ строго выпукла на $[1/c, +\infty)$ (что, разумеется, верно, когда $I(p) = \varphi(\Phi^{-1}(p))$). Как мы знаем, (1.7.16) эквивалентно (1.7.1):

$$\mu^+(A) \geq \|1_A - p\|_{\Psi_0}, \quad p = \mu(A),$$

и поэтому нам следует сравнить нормы Орлича в L_Ψ и L_{Ψ_0} для функций вида $1_A - p$, где A – подмножество M μ-меры p. Так как для всех $p \in (0,1)$ и $x \geq 0$, $\Psi(px) \leq p\Psi(x)$ со строгим неравенством при $x \in (1/c, +\infty)$, мы имеем, полагая $x = 1/I(p)$, $q = 1 - p$,

$$2pq\Psi_0(x) = 1 = p\Psi(qx) + q\Psi(px) \leq 2pq\Psi(x)$$

со строгим неравенством при $x > 1/c$. Поэтому $\Psi_0(x) < \Psi(x)$ для всех $x \geq \inf_p 1/I(p) = 2/c$. Кроме того, $\Psi_0(x) = cx < \Psi(x)$ для всех $x \in (1/c, 2/c]$ в силу строгой выпуклости Ψ на $[1/c, +\infty)$. Наконец, $\Psi_0(x) = \Psi(x)$ при $x \in [0, 1/c]$.

Таким образом, $\Psi_0(x) \leq \Psi(x)$ для всех $x > 0$ со строгим неравенством при $x > 1/c$. Зафиксируем теперь $p \in (0,1)$ и положим

$$x = \|\chi_A - p\|_\Psi, \quad x_0 = \|\chi_A - p\|_{\Psi_0}.$$

По самому определению нормы Орлича, $p\Psi(qx) + q\Psi(px) = 1$. Следовательно $p\Psi_0(qx) + q\Psi_0(px) \leq 1$, причем это неравенство будет строгим тогда и только тогда, когда $px > 1/c$ или $qx > 1/c$. Так как функция $y(p) = px$ возрастает и $y(1/2) = 1/c$, это возможно в том и только в том случае, если $p > 1/2$ или $q > 1/2$. Поэтому $x_0 < x$ при $p \neq 1/2$ и $x = x_0$ при $p = 1/2$. Таким образом, неравенство (1.7.16) становится на индикаторных функциях

$g = 1_A$ изопериметрическим неравенством $\mu^+(A) \geq I(p)$ в том и только в том случае, если A имеет меру $p = 1/2$, и не будет таковым при $p \neq 1/2$.

Доказательство следствия 1.7.1. Мы покажем, что $L_\Psi(M, \mu)$ вложено в $L_{\Psi_1}(M, \mu)$, то есть, что $L_\Psi(M, \mu) \subset L_{\Psi_1}(M, \mu)$, причем $\|g\|_{\Psi_1} \leq c\|g\|_\Psi$ для некоторой постоянной $c > 0$ и всех $g \in L_\Psi(M, \mu)$, если подберем такие константы $c, d > 0$, что

$$\Psi_1(x) \leq \frac{1}{d}\,\Psi(cx), \tag{1.7.17}$$

для всех достаточно больших $x > 0$. По условию, существует c, такое что $\|g\|_{\Psi_1} \leq c\|g\|_W$ для всех $g \in W(M, \mu)$. В силу теоремы 1.6.1, это неравенство влечет $\|1_A - p\|_{\Psi_1} \leq cI(p)$, $p = \mu(A)$, то есть, по определению нормы в пространстве Орлича,

$$p\Psi_1\left(\frac{qx_p}{c}\right) + q\Psi_1\left(\frac{px_p}{c}\right) \leq 1, \quad p \in (0, 1),$$

где $x_p = 1/I(p)$, $q = 1 - p$. В частности, $p\Psi_1\Big(\frac{qx_p}{c}\Big) \leq 1$. Пусть $0 < p \leq 1/2$. В этом случае $q \geq 1/2$, и поскольку Ψ_1 возрастает на $[0, +\infty)$, получаем

$$x_p \leq 2c\,\Psi_1^{-1}\left(\frac{1}{p}\right), \quad 0 < p \leq 1/2, \tag{1.7.18}$$

где Ψ_1^{-1} – обратная к Ψ_1, суженной на $[0, +\infty)$. Возвратимся к функции Ψ и тождеству (1.7.7). Так как $y(p) = px_p$ возрастает на $(0, 1)$, необходимо $\Psi(c_0) < 1$, где $c_0 = \lim_{p\to 0^+} px_p$, ибо в противном случае мы бы получили

$$1 = p\,\Psi(qx_p) + q\,\Psi(px_p) > p\,\Psi(c_0) + q\,\Psi(c_0) = \Psi(c_0) \geq 1.$$

Устремляя в (1.7.7) $p \to 0^+$, имеем для всех достаточно малых $p \in (0, 1/2]$,

$$p\,\Psi(qx_p) \leq d = \frac{1 - N(c_0)}{2} > 0.$$

Следовательно для таких p имеем $p\Psi(x_p/2) \le d$, то есть,

$$x_p \ge 2\Psi^{-1}\left(\frac{d}{p}\right), \tag{1.7.19}$$

где Ψ^{-1} – обратная к Ψ, суженной на $[0,+\infty)$. Сравнивая (1.7.18) и (1.7.19), заключаем, что для всех достаточно малых $p \in (0,1/2]$

$$\Psi^{-1}\left(\frac{d}{p}\right) \le c\,\Psi_1^{-1}\left(\frac{1}{p}\right),$$

из чего (1.7.17) следует после замены $x = \Psi_1^{-1}(1/p)$.

Доказательство теоремы 1.7.3. В силу теоремы 1.7.1, нам достаточно проверить, что функция $z(p) = pq/I_\gamma(p)$, $q = 1-p$, вогнута на (0,1). Здесь $I_\gamma(p) = \varphi(\Phi^{-1}(p))$. Так как z симметрична относительно точки $p = 1/2$, нужно установить вогнутость на интервале $0 < p < 1/2$, то есть, показать, что функция

$$g(x) = z'(\Phi(x)) = \frac{(1-2\Phi(x))\varphi(x) + \Phi(x)\,(1-\Phi(x))x}{\varphi^2(x)}$$

не возрастает на $(-\infty,0)$, то есть, что $g'(x) \le 0$. После дифференцирования с помощью тождества $\varphi'(x) = -x\varphi(x)$, это неравенство примет вид

$$u(x) = (1+2x^2)\Phi(x)\,(1-\Phi(x)) - \varphi^2(x) + 2x(1-2\Phi(x))\varphi(x) \le 0.$$

Еще одно дифференцирование дает

$$u'(x) = 4x\Phi(x)\,(1-\Phi(x)) + 4x\varphi(x)\,(1-\varphi(x)) + 3\varphi(x)\,(1-2\Phi(x)).$$

Пусть $v(x) = 4x(1-\varphi(x)) + 3(1-2\Phi(x))$, так что

$$u'(x) = 4x\Phi(x)\,(1-\Phi(x)) + \varphi(x)v(x). \tag{1.7.20}$$

Тогда

$$v'(x) = 4 + \varphi(x)\,(x^2-10) \tag{1.7.21}$$

и $v''(x) = x(12 - x^2)\varphi(x) \geq 0$ при $0 \leq x \leq \sqrt{12}$. Поэтому v выпукла на $[0, \sqrt{12}]$. Кроме того, $v(0) = 0$,

$$v'(0) = 4 - 10\varphi(0) = \frac{\sqrt{32\pi} - 10}{\sqrt{2\pi}} > 0,$$

следовательно $v' > 0$ на $[0, \sqrt{12}]$. Согласно (1.7.21), $v' > 0$ на $[\sqrt{10}, +\infty)$, и поскольку функция v' четна, $v' > 0$ на всей прямой. Следовательно v возрастает на всей прямой. Так как $v(0) = 0$, имеем $v(x) < 0$ на $(-\infty, 0)$, поэтому, согласно (1.7.20), $u' < 0$ на $(-\infty, 0)$. Таким образом, u убывает на этой полуоси, и остается заметить, что $u(-\infty) = 0$. Теорема 1.7.3 доказана.

§ 1.8. Примечания

Теорема 1.1.1 доказана в [78]. Лемма 1.1.1 доказана в [8].

Различные вопросы, связанные с изопериметрической задачей для вероятностных мер на прямой, рассматривались в [4], [8], [71] и [78]. Теорема 1.2.1 доказана в [71] (случай двустороннего показательного распределения был ранее исследован в работе Талаграна [216]). Теорема 1.2.2 доказана в [4] и [78], где было отмечено и следствие 1.2.1 (условие существования непрерывной плотности снято в [8]). Многочисленные примеры, включающие многовершинные распределения, приведены в [78].

Функциональная форма для "интегральных" изопериметрических неравенств (1.3.4) была введена в [72] и [73]. Там же и доказана теорема 1.3.1. Термин "мультипликативный модуль" (и тем более "совершенный модуль") не является общепринятым. Свойства этих объектов изучались в [71] и [73] (леммы 1.4.2, 1.4.3, 1.4.4, 1.4.5, а также леммы 2.2.1, 2.2.2, 2.4.1, 2.4.2, 2.4.3, 2.4.4 и следствия 2.4.1, 2.4.2 из гл.2; см. также лемму 2.7.1). Лемма 1.4.5 детализирует в одномерном случае известную характеризацию К. Борелля [88] логарифмически вогнутых распределений.

Функциональная форма для "дифференциальных" изопериметрических неравенств (1.4.8) была введена в [72] на примере гауссовского изопериметрического неравенства. Там же по-существу доказана и теорема 1.4.1.

Введенное определение модуля градиента $|\nabla g|$ для функций g на абстрактном метрическом пространстве (M,ρ) использовалось в [78] и [80], и мы не можем указать более ранние ссылки. Как показывают леммы 1.4.1 и 1.6.1, это определение хорошо согласуется с понятием периметра. В случае $M = \mathbf{R}^n$ (с евклидовой метрикой) оно согласуется и с известной теоремой Степанова [43]: если $|\nabla g| < +\infty$ почти всюду (в смысле меры Лебега), то функция g почти всюду дифференцируема (и значит абстрактное определение не расходится с обычным, если отождествлять функции, совпадающие на множестве лебеговой меры нуль). Однако, существуют и другие определения. Согласно Хайнонену и Коскеле [152], функция f на метрическом пространстве (M, ρ) называется слабым градиентом данной функции g на M, если для всех $a < b$ и любого пути $\gamma : [a, b] \to M$, такого что $\rho(\gamma(t), \gamma(s)) \leq |t - s|$ при $t, s \in [a, b]$, имеет место неравенство

$$|g(\gamma(a)) - g(\gamma(b))| \leq \int_a^b f(\gamma(t))\, dt.$$

Следуя [152], Коскела и МакМанус [162] использовали f под именем "верхний градиент", а Семес [212] – под именем "обобщенный градиент". В [212] отмечено (без доказательства), что для липшицевых g функция $f = |\nabla g|$, определяемая с помощью (1.4.7), всегда является обобщенным градиентом g.

Теорема 1.5.1 доказана в [72].

В представленном виде теорема 1.6.1 доказана в [78]. Лемму 1.6.1 можно найти в [78] и [80]. Теоремы 1.7.1, 1.7.2 и 1.7.3 доказаны в [78].

Утверждение об эквивалентности неравенств (1.7.1) и (1.7.2) можно обобщить следующим образом. Пусть Ψ – произвольная выпуклая функция на $\mathbf{R}$, не являющаяся аффинной. Тогда для всех a и b, таких что $b > \Psi(a)$,

$$\inf_{\mathbf{E}g = a, \mathbf{E}\Psi(g) = b} \mathbf{E}|\nabla g| \ = \inf_{0 < p < 1} I_\mu(p)\, x_p(a, b), \tag{1.8.1}$$

где I_μ – изопериметрическая функция вероятностной меры μ на (абстрактном) метрическом пространстве (M, ρ), и $x = x_p(a, b)$ – единственное положительное решение уравнения

$$p\Psi(a + qx) + q\Psi(a - px) = b, \quad q = 1 - p.$$

Первый инфимум в (1.8.1) берется по всем функциям g на M, имеющим конечную липшицеву константу на всех шарах в M и таким, что $\mathbf{E}g = a$, $\mathbf{E}\Psi(g) = b$. Когда Ψ – функция Юнга, равенство в (1.8.1) равносильно утверждению об эквивалентности (1.7.1) и (1.7.2), и, как отмечалось, эквивалентность неравенств (1.7.1) и (1.7.2) вытекает из теоремы Ротхауза с функционалом $L(g) = \|g - \mathbf{E}g\|_\Psi$. Однако, если Ψ не является функцией Юнга, теорему 1.6.1 применить нельзя. В общем случае равенство (1.8.1) доказано в [78]. Вопросы об эквивалентности изопериметрических неравенств неравенствам Соболева обсуждаются также в [145]. Неравенства вида (1.6.7),

$$c\,\|g - \mathbf{E}g\|_\alpha \leq \mathbf{E}|\nabla g|, \quad \alpha \geq 1, \tag{1.8.2}$$

и его обобщения на тот случай, когда L^1-норма модуля градиента заменяется на норму в пространстве Лебега L^β, иногда называютя неравенствами типа Соболева–Пуанкаре (и просто неравенствами типа Пуанкаре при $\alpha = \beta$). В терминах изопериметрической функции I_μ наилучшая постоянная $c = c(\alpha)$ в (1.8.2), учитывая отмеченную эквивалентность неравенств (1.6.6) и (1.6.7), определяется соотношением

$$c = \inf_{0<p<1} \frac{I_\mu(p)}{(p^\alpha q + pq^\alpha)^{1/\alpha}}, \quad q = 1 - p. \tag{1.8.3}$$

Таким образом, решив изопериметрическую задачу в (M, ρ, μ), то есть, определив I_μ, можно найти c с помощью (1.8.3). Однако, уже в простейшем случае, когда $M = S^1(r)$ – окружность радиуса $r > 0$ с равномерным распределением μ, и следовательно $I_\mu(p) = \frac{1}{\pi r}$ – постоянная функция, (1.8.3) представляет собой не такую уж и простую задачу о максимизации функции $I_\alpha(p) = (p^\alpha q + pq^\alpha)^{1/\alpha}$. Тот факт, что при $\alpha \leq 3$ максимум этой функции достигается в точке $p = \frac{1}{2}$, и следовательно $c(\alpha) = \frac{2}{\pi r}$, доказан в [78]. При $\alpha = 1$ соответствующее неравенство (1.8.2) (с оптимальной постоянной c для ненормализованной меры Лебега на окружности) упоминается в работах Оссермана [198] и Ротхауза [206] как неравенство Файнберга (типа Виртингера), а при $\alpha = 2$ – в [206] (однако, там не отмечен тот факт, что если рассматривать (1.8.2) для нормализованной меры Лебега, то константы совпадают: $c(1) = c(2)$). При $\alpha > 3$ постоянные $c(\alpha)$ убывают.

Когда $\mu = \sigma_n$ – равномерное распределение на n-мерной сфере $M = S^n(r)$ с $n \geq 2$, оптимальная постоянная $c(\alpha)$ в (1.8.2) положительна только при $\alpha \leq \frac{n}{n-1}$. Ее точное значение найдено в работе Чанки [232], использовавшим изопериметрическую теорему для сферы. В этом случае минимум в (1.8.3) достигается при $p = \frac{1}{2}$ вне зависимости от α. Следовательно $c(\alpha) = c(\frac{n}{n-1})$, причем экстремальными функциями в (1.8.2) (в асимптотическом смысле) являются индикаторы полусфер. Частный случай $n = 2$ исследовался ранее Таленти [226]. Интересно, что если записать (1.8.2) при $\alpha = \frac{n}{n-1}$ по отношению к (ненормализованной) мере Лебега на сфере (но, конечно, понимая внутреннее математическое ожидание как среднее значение), то можно обнаружить, что оптимальная постоянная c не будет зависеть от r.

В [232] неравенство (1.8.2) рассматривалось также для равномерного распределения на шаре в $\mathbf{R}^n$. Для шара решение (дифференциальной) изопериметрическй задачи известно : экстремальными являются шары со специфическим центром и радиусом ([12], [25]). Этот факт, согласно [25], был доказан Бураго и Мазья в [11].

В случае гауссовской меры $\mu = \gamma_n$ на $M = \mathbf{R}^n$ (с евклидовой метрикой) оптимальная постоянная $c(\alpha)$ в (1.8.2) положительна только при $\alpha = 1$. Ее точное значение $c(1) = \sqrt{2/\pi}$ найдено Пизье [202] без использования гауссовского изопериметрического неравенства. В качественном смысле Леду усилил этот результат, заменив $\|\cdot\|_\alpha$ в (1.8.2) на норму в подходящем пространстве Орлича (им доказано неравенство (1.7.16) с точностью до абсолютного множителя [171]) .

В [78] предложены следующие достаточные условия, при которых инфимум в (1.8.3) достигается в точке $p = \frac{1}{2}$ и стало быть равен $2\, I_\mu(\frac{1}{2})$: I_μ – симметрична относительно $\frac{1}{2}$, $I_\mu(0^+) = I_\mu(1^-) = 0$, и функция $dI_\mu^\alpha(p)/dp$ выпукла на $(0, \frac{1}{2}]$ (где $1 \le \alpha \le 2$). В гауссовском случае и случае сферы эти условия выполняются для всех допустимых α.

Наконец, отметим, что (1.8.2) влечет неравенство

$$\|g\|_\alpha \le K\, \|\nabla g\|_1 + K_1\, \|g\|_1 \tag{1.8.4}$$

с (уже, вообще говоря, неоптимальной) постоянной $K = 1/c(\alpha)$ ($K_1 = 1$). Такие и более общие неравенства, связывающие $\|g\|_\alpha$ с нормами функций $|\nabla g|$ и g в других пространствах Лебега, составляют важнейшую часть в теории пространств Соболева. Они исследовались многими авторами. Основополагающими в этой области являются классические работы Соболева [36], [37], [38], в которых такие соотношения (включая производные более высоких порядков) были установлены для многомерных областей евклидового пространства (один из наиболее ранних результатов принадлежит Фридрихсу [133]). Современное состояние теории соболевских пространств изложено в книгах Мазьи [25], Адамса [48], Куфнера [164], Эбея [149], причем соболевские пространства на абстрактных метрических пространствах только начинают исследоваться (важные результаты в этом направлении были недавно получены Хайвашем, см. напр. [144]).

Вопрос о точных константах в неравенствах вида (1.8.4) и их обобщениях оказывается довольно деликатным и даже в некоторых простых ситуациях представляет собой отдельную непростую задачу (см., напр., Аубин [60], Таленти [225], Эбей и Вогон [150], [151]). Один важный частный случай занимает особое положение: $M = S^n(r)$ – сфера с (ненормализованной) мерой Лебега, и $\alpha = \dfrac{n}{n-1}$. В этом случае точное значение оптимальной постоянной K в (1.8.4) было найдено Аубиным [61]. Весьма любопытно, что эта постоянная совпадает с оптимальной постоянной K в классическом неравенстве Соболева для меры Лебега в $\mathbf{R}^n$

$$K \int_{\mathbf{R}^n} |\nabla g(x)|\, dx \geq \left(\int_{\mathbf{R}^n} |g(x)|^{n/(n-1)} dx \right)^{(n-1)/n}$$

(g – произвольная гладкая функция с компактным носителем).

ГЛАВА II. ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ В ПРОСТРАНСТВАХ С РАВНОМЕРНЫМ РАССТОЯНИЕМ

§ 2.1. Индукционный шаг

Снова пусть M – топологическое пространство с выделенной системой открытых окрестностей $U(x)$, $x \in M$, и снабженное (борелевской) вероятностной мерой μ. Рассмотрим изопериметрическое неравенство в M

$$\mu(U(A)) \geq R(\mu(A)). \tag{2.1.1}$$

Здесь нас будет интересовать только один вопрос: можно ли распространить неравенство (2.1.1) на пространство большей "размерности", то есть на декартову степень M^n с продакт-мерой μ^n? Чтобы не рассматривать вопросы измеримости, будем в дальнейшем предполагать, что M метризуемо и сепарабельно – в этом случае, μ^n заведомо определена на σ-алгебре борелевских подмножеств M^n.

В M^n выделим систему окрестностей–"кубов"

$$U(x) = U(x_1) \times \cdots \times U(x_n), \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in M^n,$$

так что в соответствии с (1.1.1) окрестности множеств $A \subset M^n$ должны определяться равенством

$$U(A) = \bigcup_{a \in A} U(a)$$

(для упрощения записи мы игнорируем индекс размерности). В частности, если в M $U(A) = A^h$ – h-окрестность $A \subset M$ в смысле метрики ρ, то в M^n $U(A) = A^h$ – h-окрестность $A \subset M^n$ в смысле метрики $\rho_\infty(x,y) = \sup_{1\le i\le n} \rho(x_i, y_i)$.

При этих обозначениях справедлива следующая

Теорема 2.1.1. Пусть $R : [0,1] \to [0,1]$ – вогнутый совершенный модуль. Если неравенство (2.1.1) выполняется для (M, μ), то оно выполняется для (M^n, μ^n) (в классе всех измеримых подмножеств M и M^n соответственно).

Напомним, что совершенные модули были определены условиями (1.3.5)–(1.3.6) и отдельно в определении 1.3.2.

Приведем также бесконечномерный вариант теоремы 2.1.1. В пространстве (M^∞, μ^∞) рассмотрим систему "кубов" $U_\infty(x) = U(x_1) \times U(x_2) \times \ldots$, $x \in M^\infty$. Они уже не будут открытыми множествами в M^∞, поэтому для нецилиндрических A мы не можем сказать, что множества $U(A)$ будут измеримы. Однако, можно оценивать нижнюю и внешнюю меры: $\mu^\infty_*(U(A))$ и $(\mu^\infty)^*(U(A))$.

Следствие 2.1.1. Пусть $R : [0,1] \to [0,1]$ – вогнутый совершенный модуль. Если неравенство (2.1.1) выполняется для (M, μ), то для всех измеримых $A \subset M^\infty$

$$(\mu^\infty)^*(U(A)) \ge R(\mu(A)). \tag{2.1.2}$$

Замечание 2.1.1. В "регулярных" случаях внешнюю меры можно заменить в (2.1.2) на внутреннюю. Это, например, относится к ситации, когда $M = \mathbf{R}$ с обычной системой окрестностей, то есть, к неравенствам вида

$$(\mu^\infty)^*(A + (-h,h)^\infty) \ge R_h(\mu^\infty(A))$$

при дополнительном предположении, что $R_h(p)$ непрерывно зависит от пары аргументов (p,h). Действительно, пусть $0 < p' < p$, $0 < h' < h$. Можно подобрать компактное множество $K \subset A$ так, чтобы $\mu^\infty(K) \geq p'$. Так как $K + [-h', h']^\infty$ компактно (как сумма компактных множеств) и следовательно измеримо, имеем:

$$\mu_*^\infty(A + (-h, h)^\infty) \geq \mu^\infty(K + [-h', h']^\infty)$$
$$\geq (\mu^\infty)^*(K + (-h', h')^\infty) \geq R_{h'}(p').$$

Устремляя $p' \to p$, $h' \to h$, мы получим

$$\mu_*^\infty(A + (-h, h)^\infty) \geq R_h(\mu^\infty(A)).$$

Доказательство теоремы 2.1.1. Будем использовать функциональную форму (1.3.4): по теореме 1.3.1 для любой функции $g : M \to [0, 1]$

$$\mathbf{E}\, Ug \geq R\left(\mathbf{E}\, R^{-1}(g)\right), \tag{2.1.3}$$

где $Ug(x) = \sup\{g(a) : x \in U(a)\}$. Напомним, что Ug всегда полунепрерывна снизу. Соответственно, для функций g на M^n U-операция задается равенством

$$Ug(x_1, \ldots, x_n) = \sup\{g(a_1, \ldots, a_n) : a_i \in U(x_i),\ 1 \leq i \leq n\}.$$

Математическое ожидание в (2.1.3) понимается в смысле меры μ. Если мы распространим это функциональное неравенство на (M^n, μ^n), то на индикаторных функциях оно приведет к "многомерному" варианту (2.1.1).

Доказательство можно провести по индукции. Чтобы сделать индукционный шаг, предположим что мы имеем два пространства (M, μ) и (M', μ') со своими системами окрестностей $U(x)$ и $U'(x')$. Рассмотрим произведение $(M \times M', \mu \times \mu')$ с системой окрестностей $U(x) \times U'(x')$, $(x, x') \in M \times M'$. Определим

$$D(x) = \{a \in M : x \in U(a)\}, \quad x \in M,$$
$$D'(x') = \{a' \in M' : x \in U'(a')\}, \quad x \in M'.$$

Предполагаем, что (2.1.3) выполняется для (M, μ) и (M', μ'). Рассмотрим измеримую функцию $g : M \times M' \to [0,1]$. Введем $V = R^{-1}$ и зафиксируем $x' \in M'$. Тогда для функции $x \to g(x, x')$ (2.1.3) запишется как

$$\int_M V(g(x,x'))\, d\mu(x) \le V\left(\int_M \sup_{y\in D(x)} g(y,x')\, d\mu(x)\right). \tag{2.1.4}$$

Положим

$$u(x') = \int_M \sup_{y\in D(x)} g(y,x')\, d\mu(x).$$

Функция u корректно определена (так как под интегралом стоит полунепрерывная по x функция), но не видно никаких оснований считать ее измеримой. Поэтому введем измеримую миноранту u_*. По теореме Фубини левая часть (2.1.4) μ'-измерима. Кроме того, $V(u_*)$ представляет собой измеримую миноранту $V(u)$. Поэтому (2.1.4) влечет неравенство

$$\int_M V(g(x,x'))\, d\mu(x) \le V\left(u_*(x')\right), \tag{2.1.5}$$

справедливое для μ'-почти всех $x' \in M'$. Интегрируя (2.1.5) по переменной x' и применяя (2.1.3) к u_*, мы получим

$$\int_{M'}\int_M V(g(x,x'))\ d\mu(x)\, d\mu(x') \le V\left(\int_{M'} U\, u_*(x')\, d\mu'(x')\right).$$

Остается заметить, что $u_* \le u$, и следовательно $U\, u_* \le U\, u$, и что

$$\begin{aligned} U\, u(x') &= \sup_{y'\in D'(x')} g(y') = \sup_{y'\in D'(x')} \int_M \sup_{y\in D(x)} g(y,y')\ d\mu(x) \\ &\le \int_M \sup_{y'\in D'(x')} \sup_{y\in D(x)} g(y,y')\ d\mu(x) = \int_M Ug(x,x')\ d\mu(x). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Доказательство следствия 2.1.1. Пусть $g : M^\infty \to [0,1]$ – измеримая функция. Будем доказывать неравенство

$$\mathbf{E}^*\, Ug \ge R\left(\mathbf{E}\, R^{-1}(g)\right), \tag{2.1.6}$$

где $Ug(x) = \sup\{g(a) : a \in M^\infty, x_i \in U(a_i), i \geq 1\}$, так что на индикаторных функциях (2.1.6) превращается в (2.1.2) ($\mathbf{E}^*$ означает внешний интеграл по мере μ^∞). Пусть ψ – измеримая мажоранта для Ug. В частности, $0 \leq g \leq Ug \leq \psi \leq 1$. Для любых фиксированных $(x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)$ g будет измеримой функцией первых n переменных $(x_1, \dots, x_n) \in M^n$, и поэтому можно применить теорему 2.1.1:

$$\int_{M^n} V(g(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots))\, d\mu^n(x_1, \dots, x_n) \leq \tag{2.1.7}$$

$$V\left(\int_{M^n} \sup_{y_i \in D(x_i)} g(y_1, \dots, y_n, x_{n+1}, \dots)\, d\mu^n(x_1, \dots, x_n)\right) \leq \tag{2.1.8}$$

$$V\left(\int_{M^n} \psi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots)\, d\mu^n(x_1, \dots, x_n)\right) \tag{2.1.9}$$

Заметим, что функция от переменных $(x_1, \dots, x_n)$ под интегралом в (2.1.8) полунепрерывна снизу, но это, конечно, не влечет измеримость всего интеграла от переменных $(x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)$. Рассмотрим интегралы в (2.1.7) и (2.1.9) как условные математические ожидания на вероятностном пространстве (M^∞, μ^∞) относительно сигма-алгебр τ_n, порожденных координатными функциями $\pi_k(x) = x_k$, $k > n$:

$$(2.1.7) = \mathbf{E}(V(g)|\tau_n), \qquad (2.1.9) = V(\mathbf{E}(\psi|\tau_n)).$$

Хорошо известно, что для любой суммируемой случайной величины η на (M^∞, μ^∞) μ^∞-почти наверное $\mathbf{E}(\eta|\tau_n) \to \mathbf{E}\eta$ при $n \to \infty$. Поэтому в пределе, с учетом непрерывности функции V, (2.1.7) и (2.1.9) дадут искомое неравенство $\mathbf{E}V(g) \leq V(\mathbf{E}\psi) = V(\mathbf{E}^* Ug)$. Следствие доказано.

§ 2.2. Изопериметрическая функция бесконечномерной продакт-меры

Если в "одномерном" неравенстве (2.1.1) R не является совершенным модулем, то утверждение теоремы 2.1.1 перестает быть верным. Поэтому нашей следующий задачей будет определение оптимальной функции R в (2.1.1), обслуживающей все размерности. Согласно нашим обозначениям, такой функцией является

$$R_{\mu^\infty}(p) = \inf_n R_{\mu^n}(p), \qquad 0 \leq p \leq 1,$$

где

$$R_{\mu^n}(p) = \inf_{\mu^n(A) \geq p} \mu^n(U(A))$$

– изопериметрическая функция продакт-меры μ^n (инфимум берется по всем измеримым $A \subset M^n$ меры $\mu^n(A) \geq p$). Таким образом, R_{μ^∞} – изопериметрическая функция "бесконечномерной" продакт-меры μ^∞ в пространстве (M^∞, μ^∞) для системы "кубов" $U_\infty(x) = U(x_1) \times U(x_2) \times \dots$, $x \in M^\infty$, в классе всех "конечномерных" (цилиндрических) подмножеств M^∞:

$$R_{\mu^\infty}(p) = \inf_{\mu^\infty(A) \geq p} \mu^\infty(U(A)), \qquad 0 \leq p \leq 1,$$

где инфимум берется по всем цилиндрическим измеримым подмножествам $A \subset M^\infty$ меры $\mu^\infty(A) \geq p$.

Итак, предположим, что мы решили одномерную изопериметрическую задачу, то есть определили R_μ – оптимальную функцию в (2.1.1). Определяется ли тогда R_{μ^∞} однозначно? И если да, то как ее найти или описать? На эти вопросы будут ниже даны ответы в предположении, что функция R_μ вогнута на (0,1). Кроме того, мы будем предполагать, что выделенная система окрестностей в M обладает следующим свойством симметричности:

$$x \in U(y) \Rightarrow y \in U(x), \qquad x, y \in M. \tag{2.2.1}$$

Теорема 2.2.1. Предположим, что функция R_μ вогнута на (0,1), причем $R_\mu \neq 1$ (тождественно). Тогда R_{μ^∞} – максимальная функция среди всех возрастающих биекций $R : [0,1] \to [0,1]$, таких что $R \leq R_\mu$ и для всех $p, q \in (0,1)$,

$$R(pq) \leq R(p)\, R(q), \tag{2.2.2}$$

$$S(pq) \geq S(p)\, S(q), \tag{2.2.3}$$

где $S(p) = 1 - R(1-p)$.

То есть, R_{μ^∞} – максимальный совершенный модуль, мажорируемый R_μ. Конечно, существовавие такой функции входит в утверждение теоремы. Отметим также, что случай $R_\mu \equiv 1$ на (0,1] возможен, и тогда, очевидно, $R_{\mu^\infty} \equiv 1$ на (0,1].

Следствие 2.2.1. Предположим, что функция R_μ вогнута на (0,1). Следующие утверждения эквивалентны:

a) $R_{\mu^\infty} = R_\mu$;

b) $R_{\mu^n} = R_\mu$, где $n \geq 2$ фиксировано;

c) функция $R = R_\mu$ удовлетворяет (2.2.2) и (2.2.3).

Для доказательства теоремы и следствия, начнем с подготовительных лемм.

Лемма 2.2.1. Для любой неубывающей функции $f : (0,1] \to (0,1]$, такой что $f(p) \geq p$ для всех $p \in (0,1]$, существует максимальный мультипликативный модуль R, мажорируемый f. Именно:

$$R(p) = \inf f(p_1) \ldots f(p_n), \tag{2.2.4}$$

где инфимум берется по всем конечным наборам $\{p_1, \ldots, p_n\} \subset (0,1]$ со свойством $p_1 \ldots p_n = p$. В частности, $R(p) \geq p$ для всех $p \in (0,1]$. Если f вогнута, то R тоже вогнута.

Доказательство. Функция R, определенная в (2.2.4), является, очевидно, максимальным мультипликативным модулем, мажорируемым f. Покажем, что R вогнута, если f вогнута. Так как

$R = \inf_n R_n$, где R_n определяется (2.2.4) с фиксированным $n \geq 1$, достаточно доказать вогнутость всех R_n. Используя индукцию, необходимо показать, что для любой пары вогнутых неубывающих функций $f_1 \geq 0$ и $f_2 \geq 0$, заданных на (0,1], функция

$$R(p) = \inf\{f_1(p_1)\, f_2(p_2) : p_1, p_2 \in (0,1],\ p_1 p_2 = p\} \tag{2.2.5}$$

также вогнута и не убывает на (0,1]. Более того, так как f_1 и f_2 могут быть представлены как поточечные инфимумы некоторых семейств неубывающих аффинных функций, достаточно рассмотреть функции $f_i(p) = a_i + b_i p$, $a_i, b_i \geq 0$ $(i = 1, 2)$. Для таких функций (2.2.5) дает

$$R(p) = a_1 a_2 + b_1 b_2 p + 2\sqrt{a_1 a_2 b_1 b_2\, p}\,,$$

при $0 < p \leq c = \min\{(a_1 b_2)/(a_2 b_1), (a_2 b_1)/(a_1 b_2)\}$, и R аффинна при $p \geq c$, причем $R'(c^+) = R'(c^-)$. Следовательно R вогнута и не убывает.

Лемма 2.2.2. Для любой неубывающей вогнутой функции $f : (0,1] \to (0,1]$, такой что $f(1) = 1$ и $f \neq 1$ (тождественно), существует максимальный совершенный модуль R, мажорируемый f. Функция R вогнута.

Доказательство. Для возрастающей биекции R в [0,1], как обычно, обозначим через R^{-1} обратную к ней функцию. Напомним, что мы назвали дуальной к R функцию $R^*(p) = 1 - R^{-1}(1-p)$, $0 \leq p \leq 1$, являющейся обратной к функции $S(p) = 1 - R(1-p)$. Таким образом, (2.2.3) эквивалентно неравенству

$$R^*(pq) \leq R^*(p)\, R^*(q), \qquad p, q \in [0,1],$$

и значит, как уже отмечалось, R будет совершенным модулем тогда и только тогда, когда R и R^* являются мультипликативными модулями одновременно. Будем использовать следующие простые свойства дуальных функций:

$$(R^*)^* = R; \tag{2.2.6}$$

$$\text{если } R_1 \le R_2, \text{ то } R_1^* \le R_2^*; \tag{2.2.7}$$

$$\text{если } R \text{ вогнута, то } R^* \text{ вогнута.} \tag{2.2.8}$$

Здесь R, R_1 и R_2 – возрастающие биекции в [0,1]. Будем обозначать функцию R из леммы 2.2.1 как $\mathrm{mod}(f)$. Определим функции R_λ по трансфинитной индукции. Положим $R_0 = \mathrm{mod}(f)$. По лемме 1.4.2 и 2.2.1 R_0 – возрастающая вогнутая биекция в (0,1]. Когда $\lambda = \xi + 1$ – не предельное порядковое число, положим

$$R_\lambda = \min\left\{\mathrm{mod}(R_\xi), (\mathrm{mod}(R_\xi^*))^*\right\}. \tag{2.2.9}$$

В противном случае положим $R_\lambda = \inf_{\xi<\lambda} R_\xi$. Можно предполагать в таком определении, что $\lambda < \lambda_0$, где λ_0 – достаточно большое. Осуществляя индукционный шаг, предположим, что при всех $\xi < \lambda$ R_ξ – возрастающая вогнутая биекция в (0,1]. Тогда для $\lambda = \xi + 1$ функция R_λ в (2.2.9) будет возрастающей вогнутой биекцией в (0,1] в силу леммы 2.2.1 и свойства (2.2.8). Для предельных порядковых чисел λ R_λ будет обладать теми же свойствами как инфимум возрастающих вогнутых биекций.

Таким образом, мы построили невозрастающую трансфинитную последовательность R_λ, $\lambda < \lambda_0$, возрастающих вогнутых биекций в (0,1]. Если λ_0 достаточно большое, например, если $card(\lambda_0) > 2^c$, то эта последовательность должна начиная с некоторого шага $\lambda < \lambda_0$ стать постоянной, то есть, $R_{\lambda+1} = R_\lambda$. Согласно (2.2.9), это означает, что

$$R_\lambda = \mathrm{mod}(R_\lambda), \qquad R_\lambda \le (\mathrm{mod}(R_\lambda^*))^*.$$

Поэтому R_λ – мультипликативный модуль и, в силу (2.2.7) и (2.2.8),

$$R_\lambda^* \le ((\mathrm{mod}(R_\lambda^*))^*)^* = \mathrm{mod}(R_\lambda^*).$$

Следовательно, вспоминая что, $\mathrm{mod}(g) \le g$, мы получаем, что R^*_λ тоже будет мультипликативным модулем. Как следствие, R_λ – совершенный модуль.

Остается показать, что R_λ – максимальная функция среди всех совершенных модулей, мажорируемых f. Пусть R – совершенный модуль, такой что $R \le f$. Покажем индукцией по ξ, что $R \le R_\xi$ для всех $\xi < \lambda_0$. Так как $R \le f$ и R – мультипликативный модуль, имеем $R \le \mathrm{mod}(f) = R_0$. Допустим теперь, что $R \le R_\eta$ для всех $\eta < \xi$. Если ξ – предельный ординал, то $R \le \inf_{\eta<\xi} R_\eta = R_\xi$. В другом случае, когда $\xi = \eta + 1$, мы имеем $R \le \mathrm{mod}(R_\eta)$, поскольку $R \le R_\eta$ и R – мультипликативный модуль. Согласно (2.2.7), $R^* \le R^*_\eta$, следовательно $R^* \le \mathrm{mod}(R^*_\eta)$, так как R^* – мультипликативный модуль. Снова применяя (2.2.6) и (2.2.7), получаем $R = (R^*)^* \le (\mathrm{mod}(R^*_\eta))^*$. Комбинируя обе оценки, заключаем, что

$$R \le \min\left\{\mathrm{mod}(R_\eta),\, (\mathrm{mod}(R^*_\eta))^*\right\} = R_\xi.$$

Таким образом, $R \le R_\xi$ для всех $\xi < \lambda_0$. Лемма 2.2.2 доказана.

Лемма 2.2.3. Функция R_{μ^∞} является совершенным модулем. Если R_μ вогнута на (0,1), то и R_{μ^∞} вогнута на (0,1).

Доказательство. Именно в этом месте мы используем свойство симметричности (2.2.1). Для произвольного множества $B \subset M$ определим его "U-внутренность": $\mathrm{int}(B) = \{x \in M : U(x) \subset B\}$. В силу (2.2.1), для любого разбиения M на два подмножества A и B имеем:

$$U(A) \text{ и } \mathrm{int}(B) \text{ образуют разбиение } M. \tag{2.2.10}$$

Семейство кубов $U(x) = U(x_1) \times \cdots \times U(x_n)$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in M^n$, очевидно, также удовлетворяет (2.2.1), поэтому (2.2.10) выполняется и в M^n. Кроме того, для любых $A_1, B_1 \subset M^n$, $A_2, B_2 \subset M^k$

справедливы тождества

$$U(A_1 \times A_2) = U(A_1) \times U(A_2), \tag{2.2.11}$$

$$\mathrm{int}(B_1 \times B_2) = \mathrm{int}(B_1) \times \mathrm{int}(B_2). \tag{2.2.12}$$

Определим

$$R(p) = \inf_n \inf_{\mu^n(A) \geq p} \mu^n(U(A)), \tag{2.2.13}$$

$$S(p) = \sup_n \sup_{\mu^n(B) \leq p} \mu^n(\mathrm{int}(B)), \tag{2.2.14}$$

то есть, $R = R_\mu^\infty$. В силу (2.2.10), эти функции связаны соотношением

$$R(p) + S(1-p) = 1, \qquad 0 < p < 1.$$

Проверим (2.2.2) и (2.2.3) для R и S. По определению (2.2.13), для любых $p, q \in (0,1)$ и $c > 1$ можно подобрать целые числа $n, k \geq 1$ и множества $A_1 \subset M^n$, $A_2 \subset M^k$, такие что $\mu^n(A_1) \geq p$, $\mu^k(A_2) \geq q$, причем

$$\mu^n(U(A_1)) \leq cR(p), \quad \mu^k(U(A_2)) \leq cR(q). \tag{2.2.15}$$

Множество $A = A_1 \times A_2 \subset M^{n+k}$ имеет меру $\mu^{n+k}(A) \geq pq$, следовательно, согласно (2.2.11) и (2.2.13),

$$R(pq) \leq \mu^{n+k}(U(A)) = \mu^n(U(A_1))\, \mu^k(U(A_2)). \tag{2.2.16}$$

Комбинируя (2.2.15) и (2.2.16), получаем $R(pq) \leq c^2 R(p)R(q)$. Устремляя $c \to 1^+$, приходим к неравенству $R(pq) \leq R(p)R(q)$, то есть, (2.2.2) выполняется. Точно такие же рассуждения с использованием (2.2.12) и (2.2.14) приводят к неравенству $S(pq) \geq S(p)S(q)$. По лемме 1.4.2 R – возрастающая биекция в (0,1), и следовательно R – совершенный модуль.

Вогнутость R будет ясна из нижеследующего рассуждения.

Доказательство теоремы 2.2.1. В силу леммы 2.2.2 существует максимальный совершенный модуль R, мажорируемый $f = R_\mu$.

Поэтому, так как R_{μ^∞} – совершенный модуль (лемма 2.2.3), мы имеем $R_{\mu^\infty} \le R$. Снова в силу леммы 2.2.2, функция R вогнута, поэтому по теореме 2.1.1 для любого $n \ge 1$ и любого измеримого множества $A \subset M^n$

$$\mu^n(U(A)) \ge R(\mu^n(A)).$$

Но это означает, что $R_{\mu^\infty} \ge R$. Как результат, $R_{\mu^\infty} = R$. Теорема 2.2.1 доказана.

Доказательство следствия 2.2.1. Нужно лишь показать, что $R_{\mu^2} = R_\mu$ влечет (2.2.2) и (2.2.3). Как и в доказательстве леммы 2.2.3, рассматривая множества вида $A_1 \times A_2 \subset M^2$, $B_1 \times B_2 \subset M^2$ с $\mu(A_1) \ge p$, $\mu(A_2) \ge q$, $\mu(B_1) \le p$, $\mu(B_2) \le q$, мы можем получить, опираясь на (2.2.11)–(2.2.12), неравенства

$$R_{\mu^2}(pq) \le R_\mu(p)R_\mu(q), \quad S_{\mu^2}(pq) \ge S_\mu(p)S_\mu(q),$$

где $S_\mu(p) = 1 - R_\mu(1-p)$, $S_{\mu^2}(p) = 1 - R_{\mu^2}(1-p)$. Поэтому в случае $R_{\mu^2} = R_\mu$ функция R_μ будет совершенным модулем.

§ 2.3. Логарифмически вогнутые продакт-меры с экстремальным свойством полупространств

Теперь мы можем рассматривать изопериметрическую задачу в конкретных пространствах. Теорема 2.2.1 и ее следствие интересны уже в случае, когда $M = \mathbf{R}$ с обычной системой окрестностей, так что для многомерных множеств $A \subset \mathbf{R}^n$ речь идет об h-окрестности $U_h(A) = A + (-h,h)^n$ в смысле равномерного расстояния в $\mathbf{R}^n$.

Пусть μ – логарифмически вогнутая мера на вещественной прямой $\mathbf{R}$ с плотностью f: μ сосредоточена на некотором интервале (a_μ, b_μ), где f положительна, причем $\log f$ – вогнута. Обозначим через $F^{-1} : (0,1) \to (a_\mu, b_\mu)$ обратную к функции распределения $F(x) = \mu((-\infty, x])$, $x \in (a_\mu, b_\mu)$. Здесь мы опишем все такие μ, для которых $\mu^n\left(A + (-h,h)^n\right)$ минимизируется на стандартных полупространствах $A = \{x \in \mathbf{R}^n : x_1 \le c\}$.

Теорема 2.3.1. При $n \ge 2$ следующие условия эквивалентны:

a) для любых $p \in (0,1)$ и $h > 0$ стандартные полупространства минимизируют $\mu^n\left(A + (-h,h)^n\right)$ в классе всех измеримых $A \subset \mathbf{R}^n$ меры $\mu^n(A) = p$;

b) то же свойство для класса всех выпуклых множеств A;

c) мера μ симметрична относительно своей медианы, и для всех $p, q \in (0,1)$

$$\frac{f(F^{-1}(pq))}{pq} \le \frac{f(F^{-1}(p))}{p} + \frac{f(F^{-1}(q))}{q}. \tag{2.3.1}$$

Как уже отмечалось (§ 1.4), свойство (2.3.1) вместе с симметричностью влечет $a_\mu = -\infty$, $b_\mu = +\infty$, так что носителем μ должна быть вся прямая. Таким образом, в предположении симметричности свойство *c*) означает, что при всех $h > 0$ функция

$R_h(p) = F(F^{-1}(p)+h)$ является совершенным модулем (см. лемму 1.4.3). Заметим, что при $n = 1$ утверждение теоремы перестает быть верным: условие симметричности будет как необходимым, так и достаточным для экстремальности полуосей $A = (-\infty, u]$ (§ 1.2).

Приведем два примера. Если μ – двустороннее показательное распределение, то $f(F^{-1}(p)) = \min\{p, 1-p\}$, и следовательно (2.3.1) нарушается. Если же μ – логистическое распределение, то есть, $F(x) = 1/(1+\exp(-x))$, $x \in \mathbf{R}$, то $f(F^{-1}(p)) = p(1-p)$ удовлетворяет (2.3.1). Более общо, этому условию удовлетворяют все симметричные логарифмически вогнутые μ, для которых функция $\log(f/F)$ вогнута (лемма 1.4.4).

Доказательство. $a) \Longleftrightarrow c)$: условие симметричности μ является необходимым для $a)$ и вытекает из рассмотрения одномерной задачи (теорема 2.2.2), так что можно предполагать, что мера μ симметрична. В этом случае снова по теореме 2.2.2 мы имеем для изопериметрической функции меры μ соотношение $R_{h,\mu}(p) = F(F^{-1}(p)+h)$. Условие $a)$ можно записать как $R_{h,\mu^n}(p) = F(F^{-1}(p)+h)$ для всех $p \in (0,1)$ и $h > 0$, поэтому эквивалентность $a)$ и $c)$ можно выразить соотношением $R_{h,\mu^n} = R_{h,\mu}$. Согласно следствию 2.2.1, это равносильно тому, что функция $R_{h,\mu}$ будет совершенным модулем при всех $h > 0$, то есть, свойству (2.3.1) (лемма 1.4.3).

$b) \Rightarrow c)$: симметричность μ была получена при рассмотрении в одномерной изопериметрическом неравенстве $\mu(A + (-h,h)) \geq F(F^{-1}(\mu(A)) + h)$ интервалов вида $A = [y, +\infty)$, а они являются выпуклыми. Поэтому μ симметрична. Применяя же двумерное неравенство $\mu^2(A + (-h,h)) \geq F(F^{-1}(\mu(A)) + h)$ к (выпуклым) кубам $A = (\infty, x] \times (\infty, y]$, получаем свойство $R_h(pq) \leq R_h(p)R_h(q)$, которое при $h \to 0$ превращается в (2.3.1).

Очевидно, $a) \Rightarrow b)$, и значит теорема 2.3.1 доказана.

Замечание 2.3.1. Для логарифмически вогнутых мер μ, удовлетворяющих a), мы имеем $R_{h,\mu^\infty}(p) = F(F^{-1}(p) + h)$. Согласно замечанию 2.1.1,

$$R_{h,\mu^\infty}(p) = \inf_{\mu^\infty(A) \geq p} \mu_*^\infty(A + (-h,h)^\infty), \qquad 0 \leq p \leq 1,$$

где инфимум берется по всем измеримым подмножествам $A \subset \mathbf{R}^\infty$ меры $\mu^\infty(A) \geq p$ и достигается на стандартных полупространствах.

Замечание 2.3.2. Пусть $n \geq 2$ и $\zeta = (\zeta_i)_{i=1}^n$ – последовательность независимых случайных величин, имеющих общее логарифмически вогнутое распределение μ. Тогда в терминах ρ_∞-липшицевых функций g на $\mathbf{R}^n$ (с липшицевой нормой $\|g\|_{Lip} \leq 1$) свойство a) можно записать как (1.1.5):

$$\mathbf{P}\left\{g(\zeta) - m_p(g(\zeta)) \geq h\right\} \leq \mathbf{P}\left\{\zeta_1 - m_p(\zeta_1) \geq h\right\}, \quad h > 0, \qquad (2.3.2)$$

где m_p означает квантиль порядка $p \in (0,1)$. Иначе говоря (лемма 1.1.1), для любой ρ_∞-липшицевой функции g на $\mathbf{R}^n$ существует липшицева функция g^* на прямой $\mathbf{R}$, такая что случайные величины $g(\zeta)$ и $g^*(\zeta_1)$ одинаково распределены.

Свойство b) говорит, что неравенство (2.3.2) выполняется для всех липшицевых выпуклых g. И как мы видели из доказательства, чтобы вывести (2.3.2) для всех липшицевых g, достаточно предполагать (2.3.2) только для двух функций: $g_1(x) = -x_1$ и $g_2(x) = \max(x_1, x_2)$.

§ 2.4. Изопериметрическая функция бесконечномерного показательного распределения

Здесь мы иллюстрируем применение теоремы 2.2.1 на примере несимметричного распределения. Пусть μ – одностороннее показательное распределение на $M = \mathbf{R}$ с плотностью $f(x) = \exp(-x)$, $x > 0$. Согласно теореме 1.2.1, в одномерной изопериметрической задаче экстремальными будут интервалы вида $(-\infty, x]$ и $[y, +\infty)$, то есть, изопериметрическая функция μ определяется соотношением

$$R_{h,\mu}(p) = \min\left\{(1-\alpha) + \alpha p,\, p/\alpha\right\}, \quad 0 \le p \le 1, \tag{2.4.1}$$

где $\alpha = e^{-h}$, $h > 0$. Эта функция не является совершенным модулем, но вогнута, поэтому мы находимся в условиях теоремы 2.2.1.

Теорема 2.4.1. Для всех $p \in (0,1)$ и $h > 0$,

$$R_{h,\mu^\infty}(p) = \min\left\{p^\alpha,\, 1 - (1-p)^{1/\alpha}\right\}, \quad \alpha = e^{-h}. \tag{2.4.2}$$

Напомним, что $R_{h,\mu^\infty} = \inf_n R_{h,\mu^n}$ и, согласно замечанию 2.1.1,

$$R_{h,\mu^\infty}(p) = \inf_{\mu^\infty(A) \ge p} \mu_*^\infty(A + h(-1,1)^\infty), \tag{2.4.3}$$

где инфимум берется по всем измеримым $A \subset \mathbf{R}^\infty$ меры $\mu^\infty(A) \ge p$ (μ_*^∞ означает внутреннюю меру).

По всей видимости, экстремальных множеств, обращающих (2.4.3) в равенство, нет. Однако, опираясь на (2.4.2), легко найти асимптотически экстремальные множества. Обозначим через $A_n(p) = (-\infty, a_n(p)]^n \times \mathbf{R} \times \ldots$ стандартный "n-мерный" цилиндрический куб меры p, следовательно $a_n(p) = -\log(1 - p^{1/n})$, и через $B_n(p)$ – дополнение к $A_n(1-p)$. Простой подсчет показывает, что

$$\mu^\infty(A_n(p) + h(-1.1)^\infty) \longrightarrow p^\alpha,$$
$$\mu^\infty(B_n(p) + h(-1.1)^\infty) \longrightarrow 1 - (1-p)^{1/\alpha},$$

при $n \to \infty$. Поэтому инфимум в (2.4.3) достигается на асимптотически стандартных n-мерных кубах меры p или на дополнениях к таким кубам меры $1-p$. Заметим, что эти асимптотически экстремальные множества сами по себе не зависят от параметра h, но для того, чтобы сделать выбор типа ($A_n(p)$ или $B_n(p)$), нужно сравнить p^α с $1-(1-p)^{1/\alpha}$. Нетрудно показать, что для всех $p \in [1/2, 1)$ и для всех $\alpha \in (0,1)$ $p^\alpha < 1-(1-p)^{1/\alpha}$, следовательно для всех $h > 0$ мы имеем

$$R_{h,\mu^\infty}(p) = p^\alpha,$$

и, таким образом, кубы $A_n(p)$ будут асимптотически экстремальными, как только $p \geq \frac{1}{2}$. При $p < \frac{1}{2}$ тип экстремальных множеств зависит также от h.

Для доказательства теоремы 2.4.1 мы сначала приведем несколько простых лемм о мультипликативных модулях с тем, чтобы нам легче было применить основную теорему 2.2.1.

Обозначим через Q_+ (соответственно через Q_-) семейство всех неубывающих функций $f : (0,1] \to (0,1]$, таких что $f(1) = 1$ и функция

$$T_f(x) = -\log f(\exp(-x)), \quad x \geq 0,$$

выпукла (соответственно вогнута) на $[0, +\infty)$. В классе непрерывно дифференцируемых f на (0,1] это означает, что функция

$$L_f(p) = pf'(p)/f(p)$$

не возрастает (соответственно, не убывает) на (0,1]. Ясно, что если $f = f_1, f_2 \in Q_+$, то $\min(f_1, f_2) \in Q_+$, так как функция $T_f =$

$\max(T_{f_1}, T_{f_2})$ выпукла как максимум выпуклых функций. Напомним, что наименьший мультипликативных модуль R, мажорируемый функцией f, мы обозначили $\mathrm{mod}(f)$.

Лемма 2.4.1. Если $R \in Q_+$, то R – мультипликативный модуль.

Лемма 2.4.2. Если $f \in Q_-$, то функция $R = \mathrm{mod}(f)$ имеет вид

$$R(p) = \inf_{n \geq 1} f\bigl(p^{1/n}\bigr)^n, \qquad 0 < p \leq 1.$$

Доказательство. Пусть сначала $R \in Q_+$. Функция $T_R(x) + T_R(a - x)$ выпукла на интервале $0 \leq x \leq a$ и поэтому достигает максимум в точке $x = 0$ или $x = a$. Следовательно для всех $x, y \geq 0$ $T_R(x + y) \geq T_R(x) + T_R(y)$, то есть, $R(pq) \leq R(p)R(q)$ для всех $p, q \in (0, 1]$. Таким образом, R – мультипликативный модуль. Пусть теперь $R \in Q_-$. Согласно лемме 2.2.1, нам нужно минимизировать произведения $f(p_1) \dots f(p_n)$ при условии $p_1 \dots p_n = p$ или в терминах T_f – максимизировать функцию

$$u(x_1, \dots, x_n) = T_f(x_1) + \cdots + T_f(x_n)$$

на симплексе $x_1 + \cdots + x_n = x$, $x_i \geq 0$ (при $x = -\log p$). По неравенству Йенсена $T_f(x_1) + \cdots + T_f(x_n) \leq nT_f(x/n)$, то есть, u достигает максимум в точке $(x/n, \dots, x/n)$. Таким образом,

$$\sup u = nT_f(x/n) = -n \log f\bigl(p^{1/n}\bigr).$$

Остается максимизировать по n.

Следствие 2.4.1. Для функции $f(p) = (1 - \alpha) + \alpha p$, $\alpha \in [0, 1]$, имеем $\mathrm{mod}(f)(p) = p^\alpha$.

Действительно, $f \in Q_-$ и $\inf_n f\left(p^{1/n}\right)^n = \lim_{n \to \infty} f\left(p^{1/n}\right)^n = p^\alpha$.

Лемма 2.4.3. Пусть $0 < \alpha \leq 1$. Функция $R(p) = 1 - (1 - p)^{1/\alpha}$ принадлежит Q_+ и следовательно является мультипликативным модулем. Таким образом, R и дуальная к ней функция $R^*(p) = p^\alpha$ являются совершенными модулями.

Действительно, при $\alpha = 1$ доказывать нечего, а при $\alpha \in (0,1)$ положим $\beta = 1/\alpha > 1$, $q = 1 - p$. Тогда функция

$$p \longrightarrow \alpha L_R(p) = \frac{p(1-p)^{\beta-1}}{1-(1-p)^\beta} = 1 - \frac{1-q^{\beta-1}}{1-q^\beta}$$

убывает тогда и только тогда, когда функция $u(t) = \dfrac{1-t^\gamma}{1-t}$ убывает по $t \in (0,1)$, что очевидно (здесь $\gamma = \dfrac{\beta-1}{\beta} \in (0,1)$ и $t = q^\beta$).

Так как функция $f(p) = p^\alpha$ принадлежит классу Q_+ при $\alpha \geq 0$, мы получаем из леммы 2.4.3 и леммы 2.4.1:

Следствие 2.4.2. Пусть $\alpha \in (0,1]$. Функция

$$R(p) = \min\{p^\alpha,\, 1-(1-p)^{1/\alpha}\}, \quad p \in (0,1], \tag{2.4.4}$$

принадлежит Q_+. Поскольку $R^* = R$, R – совершенный модуль.

Для доказательства теоремы 2.4.1 нам остается применить теорему 2.2.2 к функции $f(p) = R_{h,\mu}(p) = \min\{(1-\alpha)+\alpha p,\, p/\alpha\}$, заданной в (2.4.1), с помощью следующей леммы.

Лемма 2.4.4. Пусть $\alpha \in (0,1]$. Функция R, определенная выше в (2.4.4), является максимальным совершенным модулем, мажорируемым функцией $f = R_{h,\mu}$.

Доказательство. Обозначим через R_1 максимальный совершенный модуль, мажорируемый f. Поскольку R – совершенный модуль и $R \leq f$, имеем $R \leq R_1$, и нам нужно доказать обратное неравенство. Имеем: $R_1(p) \leq f_1(p) = (1-\alpha)+\alpha p$, и, применяя следствие 2.4.2, $R_1(p) \leq \mathrm{mod}(f_1)(p) = p^\alpha$. Применяя свойство (2.2.7), получаем

$$R_1^*(p) \leq \mathrm{mod}(f_1)^*(p) = 1-(1-p)^{1/\alpha}.$$

Оба неравенства дают $R_1 \leq R = \min(\mathrm{mod}(f_1), \mathrm{mod}(f_1)^*)$. Лемма 2.4.4 и значит теорема 2.4.1 доказаны.

§ 2.5. Изопериметрические неравенства для монотонных множеств

Теорема 2.4.1 может навести на мысль, что в классе всех монотонных множеств асимптотически экстремальными могут быть только кубы, то есть, выполняется неравенство

$$\mu_*^\infty(A + h(-1,1)^\infty) \geq p^\alpha, \quad p = \mu^\infty(A), \tag{2.5.1}$$

где $\alpha = e^{-h}$. Напомним, что мы называем множество $A \subset \mathbf{R}^n$ монотонным, если для всех $x, y \in \mathbf{R}^n$, как только $x \in A$ и $y_i \leq x_i$ для всех $i \leq n$, мы имеем $y \in A$. Аналогично определяются монотонные множества в $\mathbf{R}^\infty$. Если бы (2.5.1) было справедливо для таких множеств, то стандартные кубы $A_n(p)$, конечно, были бы асимптотичски экстремальными. Это предположение оказывается верным, причем тот факт, что мера μ имеет показательное распределение, не существенен.

Теорема 2.5.1. Пусть $h > 0$ и $\alpha \in (0,1)$. Если для данной вероятностной меры μ на прямой $\mathbf{R}$ одномерное неравенство (2.5.1) выполняется на интервалах вида $A = (-\infty, a]$, то оно выполняется в $\mathbf{R}^\infty$ для всех монотонных множеств.

Это утверждение – частный случай теоремы 2.1.1: в пространстве $M = \mathbf{R}$ следует выделить систему окрестностей $U(x) = (-\infty, x + h)$, то есть, окрестности множеств $A \subset \mathbf{R}^n$ будут определяться равенством $U(A) = A + (-\infty, h)^n$, причем для монотонных множеств $U(A) = A + (-h, h)^n$. Очевидно, неравенство $\mu^n(U(A)) \geq R(\mu^n(A))$ в классе всех измеримых A равносильно этому же неравенству в классе всех монотонных A. В нашем случае функция $R(p) = p^\alpha$ является совершенным модулем (лемма 2.4.3). Таким образом, (2.5.1) выполняется в $\mathbf{R}^n$ на монотонных множествах, как только оно выполняется в $\mathbf{R}$. Но на прямой монотонными являются только интервалы вида $A_0 = (-\infty, a]$ и $A_1 = (-\infty, a)$. Поскольку $U(A_0) = U(A_1)$, достаточно требовать выполнение одномерного неравенства (2.5.1) только для интервалов первого вида. Переход к бесконечномерным множествам от конечномерных стандартен (см. следствие 2.1.1 и замечание 2.1.1).

Итак, для бесконечномерного показательного распределения μ^∞ мы имеем 2 неравенства:

$$\mu^\infty(A + h(-1,1)^\infty) \geq \min\bigl\{p^\alpha,\, 1 - (1-p)^{1/\alpha}\bigr\},\ A - \text{любое}, \tag{2.5.2}$$

$$\mu^\infty(A + h(-1,1)^\infty) \geq p^\alpha, \quad A - \text{монотонное}, \tag{2.5.3}$$

где $\alpha = e^{-h}$, $p = \mu^\infty(A)$ (множество $A \subset \mathbf{R}^\infty$ и его h-окрестности предполагаются измеримыми). Как уже отмечалось, при $p \geq \frac{1}{2}$ неравенство (2.5.3) не усиливает (2.5.2). При $p < \frac{1}{2}$ и достаточно больших h снова $p^\alpha < 1 - (1-p)^{1/\alpha}$, и значит тоже нет усиления с точки зрения свойства концентрации (имеется, однако, один контраргумент, касающийся гауссовской меры; см. замечание 2.5.2 ниже). При малых же h и $p < \frac{1}{2}$, (2.5.2) и (2.5.3) существенно отличаются. Полагая в этих неравенствах $h \to 0$, мы получим оценки для μ^∞-периметра:

$$(\mu^\infty)^+(A) \geq \min\{-p\log p,\, -(1-p)\log(1-p)\},\ A - \text{любое}, \tag{2.5.4}$$

$$(\mu^\infty)^+(A) \geq -p\log p, \quad A - \text{монотонное}. \tag{2.5.5}$$

Различие между (2.5.4) и (2.5.5) проявляется, например, в том, что для покоординатно неубывающих гладких функций $g > 0$ на $\mathbf{R}^n$ продакт-меры μ^n удовлетворяют логарифмическим неравенствам Соболева $\mathbf{E}g\log g - \mathbf{E}g\log\mathbf{E}g \leq \mathbf{E}\|\nabla g\|_1$, а для произвольных гладких функций – не удовлетворяют.

Рассмотрим теперь общую ситуацию. В терминах функции распределения $F(x) = \mu((-\infty, x])$ меры μ условие теоремы 2.5.1

можно записать как неравенство

$$F((x+h)^-) \geq F(x)^\alpha, \quad x \in \mathbf{R}, \tag{2.5.6}$$

что, очевидно, влечет экспоненциальное убывание хвостов F в точке $+\infty$. Отметим, что для двойного экспоненциального распределения $F(x) = \exp(-\exp(-x))$ в (2.5.6) имеет место равенство (при $\alpha = e^{-h}$). В общем случае, фиксируя, например, параметр h, следует в (2.5.6) оптимизировать α.

Выделим один важный класс распределений, для которых неравенство (2.5.1) будет оптимальным или "почти" оптимальным. Будем рассматривать вероятностные меры μ, сосредоточенные на полуоси $[0,+\infty)$, для которых

(i) функция распределения F непрерывна и (строго) возрастает на $[0,b_F)$, где $b_F = \sup\{x : F(x) < 1\}$;

(ii) $1 - F(x+y) \leq (1-F(x))(1-F(y))$ для всех $x, y \geq 0$.

Например, все логарифмически вогнутые меры на $[0,+\infty)$ обладают этими свойствами, а для показательного распределения в (ii) имеет место равенство.

Так как мера μ^n сосредоточена на октанте $\mathbf{R}_+^n = [0,+\infty)^n$, понятие монотонности будем использовать применительно к множествам $A \subset \mathbf{R}_+^n$: A – монотонно в $\mathbf{R}_+^n$, если

$$\forall x \in A, \forall y \in \mathbf{R}_+^n \ (y_i \leq x_i \text{ для всех } i \leq n) \Rightarrow y \in A.$$

Наконец, положим

$$A^h = A + (-h,h)^n, \qquad A^{-h} = \{a \in A : \{a\} + (-h,h)^n \subset A\}.$$

Теорема 2.5.2. Пусть выполнены условия $(i) - (ii)$. Тогда для лубого непустого монотонного множества A в $\mathbf{R}_+^n$ и всех $h > 0$

$$\mu^n(A^h) \geq \exp\big[-(1-F(h))\log(1/p)\big], \tag{2.5.7}$$

$$\mu^n(A^{-h}) \leq \exp\big[-\frac{1}{1-F(h)}\log(1/p)\big]. \tag{2.5.8}$$

Поскольку неравенства (2.5.7)–(2.5.8) "безразмерные", то те же самые неравенства выполняются и в бесконечномерном пространстве $(\mathbf{R}_+^\infty, \mu^\infty)$, причем для показательного распределения они будут оптимальными (асимптотически экстремальными множествами будут кубы $A_n(p)$).

Неравенство (2.5.8) является дуальным к (2.5.7) и приведено, чтобы подчеркнуть его несимметричный характер. Например, для неравенств вида $\mu^n(A^h) \geq F(F^{-1}(p)+h)$, выполняющихся, в частности, для продакт-мер из теоремы 2.3.1, дуальными будут неравенства $\mu^n(A^{-h}) \leq F(F^{-1}(p)-h)$.

Доказательство. При $p, \alpha \in (0,1)$ мы имеем очевидное неравенство $p\alpha \leq 1-(1-p)^\alpha$. Полагая $p = 1-F(x)$, $\alpha = 1-F(h)$, где $x, h > 0$, и используя свойство (ii), получаем:

$$1 - F(x+h) \leq (1-F(x)(1-F(h)) = p\alpha \leq 1-(1-p)^\alpha = 1-F(x)^\alpha,$$

следовательно $F(x+h) \geq F(x)^\alpha$, то есть, (2.5.6). В силу теоремы 2.5.1, получаем (2.5.7). Чтобы получить (2.5.8), надо применить (2.5.7) к A^{-h}. Теорема 2.5.2 доказана.

Замечание 2.5.1. Так же, как и (2.3.2), неравенства (2.5.7)–(2.5.8) можно выразить в терминах ρ_∞-липшицевых функций g на $\mathbf{R}^n$, однако, при дополнительном условии, что эти функции не убывают (по каждой переменной). Если $\zeta = (\zeta_i)_{i=1}^n$ – последовательность независимых случайных величин, имеющих общее распределение μ, то для всех $h > 0$

$$\mathbf{P}\left\{g(\zeta) - m_p(g(\zeta)) < h\right\} \geq \exp\big[-(1-F(h))\log(1/p)\big], \tag{2.5.9}$$

$$\mathbf{P}\left\{g(\zeta) - m_p(g(\zeta)) \leq -h\right\} \leq \exp\Big[-\frac{1}{1-F(h)}\log(1/p)\Big], \tag{2.5.10}$$

где, как обычно, m_p означает квантиль порядка $p \in (0,1)$.

Положим $T(h) = F^{-1}(1-e^{-h})$, $h \ge 0$, где $F^{-1} : [0,1) \to [0,b_F)$ – обратная к F. В силу условий $(i) - (ii)$, функция T является модулем непрерывности (то есть, $T(a+b) \le T(a) + T(b)$ для всех $a, b \ge 0$) и значит порождает метрику

$$d_F(x,y) = T(|x-y|), \quad x, y \in \mathbf{R}.$$

Как следствие неравенств (2.5.9)-(2.5.10) и по аналогии с леммой 1.1.1, мы получаем такое равносильное утверждение. Пусть случайная величина ζ^* имеет двойное показательное распределение. Тогда для любой неубывающей ρ_∞-липшицевой функции g на $\mathbf{R}^n$ с нормой $\|g\|_{Lip} \le 1$ существует функция g^* на прямой $\mathbf{R}$ с липшицевой нормой $\|g\|_{Lip} \le 1$ по отношению к метрике d_F, такая что случайные величины $g(\zeta)$ и $g^*(\zeta^*)$ одинаково распределены. Такое свойство удобно использовать, например, при оценивании дисперсии $\mathrm{Var}(g(\zeta))$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(g(\zeta)) = \mathrm{Var}(g^*(\zeta^*)) &\le \frac{1}{2}\,\mathbf{E}\big(d_F(\zeta^*, \eta^*)\big)^2 \\
&= \frac{1}{2} \iint \big(F^{-1}(1 - e^{-|x-y|})\big)^2 de^{-e^{-x}} de^{-e^{-y}} \\
&= \iint\limits_{0<t<s<+\infty} \big(F^{-1}\big(1 - \frac{t}{s}\big)\big)^2 e^{-(t+s)} dt ds \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{2 - F(x)}\, dF(x),
\end{aligned}$$

где η^* – независимая копия ζ^*. Так для показательного распределения $T(h) = h$, и мы получаем оценку $\mathrm{Var}(g(\zeta)) \le \dfrac{\pi^2}{6} = \mathrm{Var}(\zeta^*)$, которая не может быть улучшена, поскольку

$$\mathrm{Var}(\max(\zeta_1, \dots, \zeta_n)) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \longrightarrow \frac{\pi^2}{6} \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Замечание 2.5.2. Неравенства (2.5.9)–(2.5.10) влекут

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\left\{g(\zeta) - m_p(g(\zeta)) \ge h\right\} \le \log(1/p)\,(1 - F(h)), \\
&\mathbf{P}\left\{g(\zeta) - m_p(g(\zeta)) \le -h\right\} \le \frac{1}{\log(1/p)}\,(1 - F(h)).
\end{aligned} \tag{2.5.11}$$

Сравним (2.5.11) с гауссовским изопериметрическим неравенством. В гауссовском гильбертовом пространстве H с ортонормальным базисом $(e_i)_{i\geq 1}$ рассмотрим семейство случайных величин K со следующими свойствами:

a) если $\sum_i a_i e_i \in K$, то $\sum_i a_i^2 \leq 1$;

b) если $\sum_i a_i e_i \in K$, то $\sum_i b_i e_i \in K$, как только $|b_i| \leq |a_i|$;

c) $e_1 \in K$.

Геометрически K представляет собой объединение параллелепипедов с центром в нуле и сторонами, параллельными осям e_i. Предположим, что случайная величина $\xi(\omega) = \sup_{x\in K} x(\omega)$ ограничена, то есть $K \in GB$ (см. [39], 45]). Заметим, что

$$\sup_{\sum_i a_i e_i \in K} \sum_i a_i^2 = \sup_{\sum_i a_i e_i \in K} \sup_i |a_i| = 1. \tag{2.5.12}$$

Применяя гауссовское изопериметрическое неравенство (1.5.1) к функции $g(x) = \sup_{\sum_i a_i e_i \in K} \sum_i a_i x_i$ в (1.1.5) (и используя, если необходимо, конечномерую аппроксимацию), мы имеем в силу (2.5.12)

$$\mathbf{P}\{\xi - m_p(\xi) \geq h\} \leq 1 - \Phi(\Phi^{-1}(p) + h) \tag{2.5.13}$$

для всех $p \in (0,1)$ и $h > 0$. С другой стороны,

$$\xi = \sup_{\sum_i a_i e_i \in K} \sum_i a_i |e_i| = g(\zeta_1, \zeta_2, \dots),$$

где $\zeta_i = |e_i|$. И, так как функция распределения случайных величин ζ_i $F(x) = 2\Phi(x) - 1$, $x \geq 0$, удовлетворяет (*i*)–(*ii*), мы можем также применить (2.5.11):

$$\mathbf{P}\{\xi - m_p(\xi) \geq h\} \leq 2\log(1/p)\,(1 - \Phi(h)). \tag{2.5.14}$$

Таким образом, (2.5.13) лучше, чем (2.5.14) при $p \geq \frac{1}{2}$, отличаясь при $p = \frac{1}{2}$ лишь множителем $2\log 2 > 1$. Однако, при $p < \frac{1}{2}$, (2.5.14) становится более точным (по-крайней мере для больших значений h), поскольку $\Phi^{-1}(p) < 0$. Конечно, рассматриваемые семейства K образуют очень узкий класс гауссовских процессов.

§ 2.6. Экстремальное свойство кубов для многомерного показательного распределения

В случае, когда μ – показательное распределение, можно получить более сильное утверждение по сравнению с теоремой 2.5.1 или 2.5.2. Множества вида $A = [0, a]^n$ будем называть стандартными кубами.

Теорема 2.6.1. Пусть μ – показательное распределение. Пусть $p \in (0, 1)$, $h > 0$. Тогда $\mu^n(A + (-h, h)^n)$ достигает наименьшее значение в классе всех монотонных подмножеств A в $\mathbf{R}_+^n$ μ^n-меры p, когда A – стандартный куб. То есть,

$$\mu^n\big(A + (-h, h)^n\big) \geq \big[e^{-h} p^{1/n} + (1 - e^{-h})\big]^n. \tag{2.6.1}$$

Для доказательства этого более деликатного свойства кубов (чем просто асимптотическая экстремальность) мы не может использовать индукционные рассуждения, как мы это делали раньше, и нам потребуется исследовать структуру h-окрестностей монотонных множеств.

Если A монотонно в $\mathbf{R}_+^n$, то вместо $A + (-h, h)^n$ можно рассматривать сумму $A + hD_n$, где $D_n = [0, 1]^n$, так как эти множества имеют одинаковую меру. Обозначим через Vol_n меру Лебега в $\mathbf{R}^n$. Ключевым оказывается следующее интересное свойство меры μ^n.

Теорема 2.6.2. Для любого непустого монотонного множества A в $\mathbf{R}_+^n$ существует монотонное множество $B \subset D_n$, такое что для всех $h \geq 0$

$$\mu^n(A + hD_n) = e^{-nh}\,\mathrm{Vol}_n(B + \varepsilon D_n), \tag{2.6.2}$$

где $\varepsilon = e^h - 1$.

Чтобы получить 2.6.1, можно будет применить к правой части (2.6.2) неравенство Брунна-Минковского

$$\mathrm{Vol}_n^{1/n}(B+B') \geq \mathrm{Vol}_n^{1/n}(B) + \mathrm{Vol}_n^{1/n}(B'), \tag{2.6.3}$$

справедливое для любых непустых измеримых (по Лебегу) множеств B и B' в $\mathbf{R}^n$, таких что $B+B'$ измеримо ([12], [203]). Применяя (2.6.3) к $B' = \varepsilon D_n$ и замечая, что $\mathrm{Vol}_n(B) = \mu^n(A) = p$, получаем:

$$\mu^n(A+hD_n) \geq e^{-nh}\big(p^{1/n}+\varepsilon\big)^n = \big[e^{-h}p^{1/n} + (1-e^{-h})\big]^n.$$

Остается доказать теорему 2.6.2.

Пусть A – непустое монотонное множество в $\mathbf{R}^n_+$. Для каждого непустого набора $\pi = \{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, n\}$, $i_1 < \ldots < i_k$, рассмотрим его проекцию на координатное подпространство

$$A_\pi = \big\{x \in \mathbf{R}^k_+ : \exists y \in A,\ \forall s = 1, \ldots, k,\ x_s = y_{i_s}\big\}.$$

Будем писать $|\pi| = k$. При $1 \leq k \leq n$ положим

$$a_k(A) = \sum_{|\pi|=k} \mathrm{Vol}_k(A_\pi), \quad b_k(A) = \sum_{|\pi|=k} \mu^k(A_\pi)$$

(суммирование ведется по всем наборам π мощности k). По определению, при $k=0$ положим $a_0(A) = b_0(A) = 1$.

Лемма 2.6.1. Для всех $\varepsilon \geq 0$

$$\mathrm{Vol}_n(A+\varepsilon D_n) = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}(A)\varepsilon^k. \tag{2.6.4}$$

Лемма 2.6.2. Для всех $h \geq 0$

$$\mu^n(A+hD_n) = e^{-nh}\sum_{k=0}^{n} b_{n-k}(A)\varepsilon^k, \tag{2.6.5}$$

где $\varepsilon = e^h - 1$.

Разложения (типа Штейнера) по степеням ε как в (2.6.4) хорошо известны в теории смешанных обьемов, где они исследуются для выпуклых множеств (см. [12]). Для нас же будет важно иметь такое разложение и для невыпуклых тел (однако, монотонных). Доказательства обоих лемм совершенно идентичны, поэтому ограничимся одним из них.

Доказательство леммы 2.6.2. В интеграле

$$\mu^n(A + hD_n) = \int \dots \int_{A+hD_n} e^{-(x_1+\dots+x_n)}\, dx_1 \dots dx_n$$

сделаем замену переменных $y_i = x_i - h$. Множество $A + hD_n$ при этом отображении перейдет в множество

$$A' = \{(a_1 - h_1, \dots, a_n - h_n) : (a_1, \dots, a_n) \in A,\ 0 \le h_i \le h\}.$$

Для каждого набора $\pi = \{i_1, \dots, i_k\}$, $1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$, рассмотрим

$$A_\pi(h) = \big\{x \in \mathbf{R}^n : (x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \in A_\pi \ \text{ и } \ -h \le x_j < 0 \text{ при } j \ne i_s\big\}.$$

Если $\pi = \varnothing$, то полагаем $A_\pi(h) = [-h, 0)^n$. Очевидно, мы построили разложение $A' = \cup_\pi A_\pi(h)$ (объединение берется по всем π, включая пустое множество). Поскольку $A_{\pi_1}(h) \cap A_{\pi_2}(h) = \varnothing$, если $\pi_1 \ne \pi_2$, мы имеем

$$\begin{aligned}\mu^n(A + hD_n) &= e^{-nh} \int \dots \int_{A'} e^{-(y_1+\dots+y_n)}\, dy_1 \dots dy_n \\ &= e^{-nh} \sum_\pi \int \dots \int_{A_\pi(h)} e^{-(y_1+\dots+y_n)}\, dy_1 \dots dy_n.\end{aligned}$$

Остается заметить, что для $\pi = \{i_1, \dots, i_k\}$

$$\int\limits_{A_\pi(h)} \dots \int e^{-(y_1+\dots+y_n)}\, dy_1 \dots dy_n =$$

$$(e^h-1)^{n-k} \int\limits_{A_\pi} \dots \int e^{-(y_{i_1}+\dots+y_{i_k})}\, dy_{i_1} \dots dy_{i_k} = \varepsilon^{n-k} \mu^k(A_\pi).$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2.6.2. В качестве B можно взять множество

$$B = \Big\{(1-e^{-a_1}, \dots, 1-e^{-a_n}) : (a_1, \dots, a_n) \in A\Big\}.$$

Тогда, как легко видеть, для любого набора $\pi = \{i_1, \dots, i_k\}$ мы имеем $\mu^k(A_\pi) = \mathrm{Vol}_k(B_\pi)$, и следовательно $b_k(A) = a_k(B)$ для всех $k = 0, 1, \dots, n$. Применяя леммы 6.2.1 и 6.2.2, приходим к требуемому тождеству. Теорема доказана.

§ 2.7. Свойство концентрации

Возвратимся к абстрактной ситуации §§ 2.1–2.2, к неравенствам

$$\mu^n(U(A)) \geq R(\mu^n(A)) \tag{2.7.1}$$

в классе всех измеримых $A \subset M^n$. Поскольку $A \subset U(A)$, естественно предполагать, что $R(p) \geq p$ для всех $p \in (0,1)$. Если мы сначала распространяли (2.7.1) с размерности $n = 1$ на произвольную размерность, а потом искали оптимальную функцию R, обслуживающую все размерности, то вполне естественным будет и вопрос о том, когда же существует хоть какая-нибудь функция R, которая бы годилась для всех размерностей. Конечно, тривиальный случай $R(p) \equiv p$ исключается, так как не несет в себе никакой информации, и поэтому наш вопрос можно поставить так: существуют ли такие $p_0, p_1 \in (0,1)$, $p_0 < p_1$, что для всех целых $n \geq 1$ и всех измеримых $A \subset M^n$ меры $\mu^n(A) \geq p_0$ мы имеем $\mu^n(U(A)) \geq p_1$? В терминах изопериметрической функции R_{μ^∞} это свойство (концентрации) запишется как $R_{\mu^\infty}(p_0) > p_0$. Так же, как и в теореме 2.1, ответ можно дать в терминах изопериметрической функции R_μ. Будем предполагать, что выполняется свойство симметричости (2.2.1): $x \in U(y) \Rightarrow y \in U(x)$ для всех $x, y \in M$.

Теорема 2.7.1. Следующие условия эквивалентны.

a) $R_{\mu^\infty}(p_0) > p_0$ для некоторого $p_0 \in (0,1)$;

b) существует $\varepsilon > 0$, такое что для всех $p \in (0,1)$

$$R_\mu(p) \geq p + \varepsilon p(1-p). \tag{2.7.2}$$

В этом случае такое же неравенство выполняется и для R_{μ^∞} при возможно другом значении $\varepsilon > 0$.

Заметим, что правую часть в (2.7.2) можно заменить на изопериметрическую функцию показательного или логистического распределения.

Переходя к конкретной ситуации, когда $M = \mathbf{R}$ с канонической системой окрестностей $U(x) = (x-h, x+h)$, мы получаем семейство изопериметрических функций R_{h,μ^∞}, $h > 0$ (по отношению к равномерному расстоянию), и поэтому вопрос о концентрации можно связать с параметром h.

Пусть $F(x) = \mu((-\infty, x])$ – функция распределения меры μ. Обозначим через $F^{-1}(p)$ наименьшую квантиль порядка $p \in (0,1)$. Положим $T_\mu(x) = F^{-1}\big(\frac{1}{1+e^{-x}}\big)$, $x \in \mathbf{R}$. Отображение T_μ переводит логистическое распределение ν в меру μ. Определим

$$T_\mu^*(h) = \sup\{|T_\mu(x) - T_\mu(y)| : |x-y| \le h\}, \quad h > 0.$$

Если $T_\mu^*(h) < +\infty$ для некоторого (и значит любого) $h > 0$, то говорят, что T_μ имеет конечный (аддитивный) модуль T_μ^*. Это, очевидно, равносильно тому, что $|T_\mu(x) - T_\mu(y)| \le a + b|x-y|$ для всех $x, y \in \mathbf{R}$ при некоторых $a, b \ge 0$, что является некоторым ослаблением свойства липшицевости. Аналогично определяются (аддитивные) модули функций, заданных на интервале вещественной прямой.

Теорема 2.7.2. Следующие условия эквивалентны.

a) $R_{h,\mu^\infty}(p_0) > p_0$ для некоторых $p_0 \in (0,1)$ и $h > 0$;

b) T_μ имеет конечный модуль.

В этом случае для всех $p \in (0,1)$, $h > 0$ и $h^* > T_\mu^*(h)$

$$R_{h^*,\mu^\infty}(p) \ge \frac{p}{p + (1-p)e^{-h}}\,. \tag{2.7.3}$$

В частности, имеет место альтернатива: либо $R_{h,\mu^\infty}(p) = p$ для всех $p \in (0,1)$ и $h > 0$, либо для всех $p \in (0,1)$ $R_{h,\mu^\infty}(p) \to 1$ при $h \to +\infty$.

Вместо логистического можно было бы строить T_μ и с помощью двустороннего показательного распределения. Это лишь повлияло бы на оценку (2.7.3).

Приведем еще одну характеризацию свойства концентрации. Пусть $(\zeta_i)_{i\geq 1}$ – последовательность независимых случайных величин, имеющих распределение μ.

Теорема 2.7.3. Свойства a) и b) эквивалентны тому, что μ имеет конечный второй момент и

c_1) $\sup_n \mathrm{Var}(\max(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)) < +\infty$;

c_2) $\sup_n \mathrm{Var}(\min(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)) < +\infty$.

Заметим, что как следствие свойства b), мера μ должна иметь экспоненциально убывающие хвосты.

Как будет видно из доказательства (см. лемму 2.7.2), дисперсии в $c_1) - c_2$) можно заменить на центральные моменты любых порядков. Эти условия можно также ослабить, требуя, чтобы центрированные (в смысле квантилей) последовательные максимумы и минимумы имели распределения, образующие плотное (предкомпактное) семейство в слабой топологии пространства вероятностных мер на прямой.

Свойство c_1) интересно само по себе, но мы не знаем, как его охарактеризовать непосредственно в терминах F. Но в важном случае симметричного распределения F, свойство b) уже дает такую характеризацию (действительно, для симметричных F c_1) и c_2), очевидно, эквивалентны). В общем (несимметричном) случае можно доказать такое утверждение. Если в c_1) цаменить дисперсии на центральные моменты первого порядка, то это свойство будет равносильно следующему [82]: ζ_1 имеет конечный первый момент, и при этом функция T_μ порождает конечный модуль на полуоси $[0, +\infty)$.

Забегая вперед, также отметим, что свойство b) можно сформулировать и в более явном виде (см. теорему 4.4.1): существуют постоянные $c > 0$ и $h > 0$, такие что для всех $x \in \mathbf{R}$

$$F(x) - F(x-h) \geq c\,F(x)(1 - F(x)).$$

Доказательство теоремы 2.7.1. $b) \Rightarrow a)$: по условию для некоторого $\alpha \in (0,1)$ (достаточно близкого к 1)

$$R_\mu(p) \geq R(p) = \frac{p}{p + (1-p)\alpha} \tag{2.7.4}$$

при всех $p \in (0,1)$. Функция R имеет вид $R(p) = F_\nu(F_\nu^{-1}(p) + h)$, где $F_\nu(x) = \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$, $x \in \mathbf{R}$ (функция распределения ν), F_ν^{-1} – обратная к ней и $\alpha = e^{-h}$. По следствию 1.4.1 R – совершенный модуль. Следовательно, в силу теоремы 2.1.1, неравенство (2.7.4) распространяется на (M^n, μ^n), то есть, R_{μ^∞} тоже удовлетворяет (2.7.4) и значит удовлетворяет (2.7.2).

$b) \Rightarrow a)$: по лемме 2.2.3 R_{μ^∞} – совершенный модуль. Поэтому достаточно доказать следующее утверждение.

Лемма 2.7.1. Пусть R – совершенный модуль, такой что $R(p) \geq p$ для всех $p \in (0,1)$. Если $R(p_0) > p_0$ для некоторого $p_0 \in (0,1)$, то существует $\varepsilon > 0$, такое что для всех $p \in (0,1)$

$$R(p) \geq p + \varepsilon p(1-p). \tag{2.7.5}$$

Доказательство. Сначала покажем, что (2.7.5) выполняется для всех p, достаточно близких к 1. Для этого будет достаточно подобрать такие $\alpha \in (0,1)$ и $x_1 \in (0,1)$, что $R(p) \geq p^\alpha$ при всех $p \in [x_1, 1)$. Так как R – мультипликативный модуль, имеем:

$$p_1 = R(p_0) = R\big(\big(p_0^{1/n}\big)^n\big) \leq R\big(p_0^{1/n}\big)^n,$$

следовательно $R(p_0^{1/n}) \geq p_1^{1/n}$ для всех целых $n \geq 1$. Пусть $p_0^{1/n} \leq p \leq p_0^{1/(n+1)}$. Как совершенный модуль, R – возрастающая биекция в [0,1], поэтому

$$R(p) \geq R(p_0^{1/n}) \geq p_1^{1/n} \geq p^\alpha,$$

причем последнее неравенство выполняется, если $p_1^{1/n} \geq p_0^{\alpha/(n+1)}$, то есть, если

$$\alpha \geq \frac{n+1}{n} \frac{\log(1/p_1)}{\log(1/p_0)}. \qquad (2.7.6)$$

Так как $p_1 > p_0$, можно подобрать $\alpha < 1$, такое что (2.7.6) выполняется для всех достаточно больших $n \geq n_1$. Таким образом, в качестве x_1 можно взять p_0^{1/n_1}.

Теперь покажем, что неравенство (2.7.5) справедливо для всех $p \in (0, 1)$, достаточно близких к нулю. Введем дуальную функцию $R^*(q) = 1 - R^{-1}(1-q)$, где R^{-1} – обратная к R. Она тоже является совершенным модулем, поэтому, как уже доказано, для некоторого $\varepsilon > 0$

$$R^*(q) \geq q + \varepsilon q(1-q) \qquad (2.7.7)$$

при всех $q \in (0, 1)$, достаточно близких к 1. Делая замену $p = 1 - q$ и решая (2.7.7), получаем, что $R(p - \varepsilon p(1-p)) \geq p$ для всех $p \in (0, 1)$, достаточно близких к 0, что, очевидно, влечет (2.7.5) для всех $p \in (0, x_0]$ с достаточно малым $x_0 > 0$ и возможно другим $\varepsilon > 0$.

Таким образом, (2.7.5) выполняется для всех $p \in (0, x_0] \cup [x_1, 1)$ при некоторых $0 < x_0 < x_1 < 1$. В силу непрерывности R, это неравенство будет выполняться и на интервале $[x_0, x_1]$, если мы покажем, что $R(p) > p$ для всех $p \in [x_0, x_1]$. Рассуждая от противного, если бы $R(p) = p$ для некоторого p, то для всех n мы бы имели $R(p^n) \leq p^n$, что противоречит доказанному.

Лемма 2.7.1 и с ней теорема 2.7.1 доказаны.

Доказательство теоремы 2.7.2.

$a) \Rightarrow b)$: по теореме 2.7.1 $R_{h,\mu}(p) \geq p + \varepsilon p(1-p)$, следовательно

$$R_{h,\mu}(p) \geq \frac{p}{p + (1-p)e^{-h_0}} = F_\nu(F_\nu^{-1}(p) + h_0) \qquad (2.7.8)$$

при всех $p \in (0, 1)$ и некоторых $h > 0$ и $h_0 > 0$. По определению изопериметрической функции, $\mu(A + (-h, h)) \geq R_{h,\mu}(\mu(A))$ для всех измеримых $A \subset \mathbf{R}$ меры $0 < \mu(A) < 1$. Беря $A = (-\infty, F^{-1}(p)]$, мы получаем с учетом (2.7.8), что для всех $p \in (0,1)$

$$F(F^{-1}(p) + h) \geq F_\nu(F_\nu^{-1}(p) + h_0).$$

Подставляя в это неравенство $p = F_\nu(x)$, имеем

$$F(T_\mu(x) + h) \geq F_\nu(x + h_0) \tag{2.7.9}$$

для всех $x \in \mathbf{R}$. Доопределим F^{-1} в точке $p = 1$ по непрерывности. Заметим, что всегда $F^{-1}(F(y)) \leq y$, как только $F(y) > 0$. В нашем случае $y = T_\mu(x) + h$ и

$$F(y) \geq F(T_\mu(x)) = F(F^{-1}(F_\nu(x))) > 0$$

верно, так как $F(F^{-1}(p)) \geq p$ для всех $p \in (0,1)$. Следовательно

$$F^{-1}(F(T_\mu(x) + h)) \leq T_\mu(x) + h. \tag{2.7.10}$$

Вычисляя F^{-1} от обеих частей (2.7.9) и используя (2.7.10), приходим к неравенству $T_\mu(x + h_0) \leq T_\mu(x) + h$, что и означает требуемое утверждение.

b) $\Rightarrow$ *a*): в силу теоремы 2.3.1, для логистической меры ν выполняется изопериметрическое неравенство

$$\nu^n(A^h) \geq \frac{p}{p + (1-p)e^{-h}} \tag{2.7.11}$$

для любого $A \subset \mathbf{R}^n$ меры $\nu^n(A) \geq p$. Это в точности (2.7.3), когда $\mu = \nu$ (A^h – h-окрестность A в смысле расстояния ρ_∞ в $\mathbf{R}^n$). Рассмотрим отображение $i(x_1, \cdots, x_n) = (T_\mu(x_1), \cdots, T_\mu(x_n))$, переводящее ν^n в μ^n. Для любого $A \subset \mathbf{R}^n$ выполняется включение

$$\big(i^{-1}(A)\big)^h \subset i^{-1}\big(A^{h^*}\big). \tag{2.7.12}$$

Действительно, если $x \in (i^{-1}(A))^h$, то для некоторого $y \in i^{-1}(A)$ $\rho_\infty(x,y) < h$, то есть, $|x_k - y_k| < h$, для всех $1 \leq k \leq n$. Так как

$i(y) = (T_\mu(y_1), \cdots, T_\mu(y_n)) \in A$ и $|T_\mu(x_k) - T_\mu(y_k)| < h^*$, получаем $\rho_\infty(i(x), i(y)) < h^*$, и следовательно $i(x) \in A^{h^*}$. Таким образом, $x \in i^{-1}\left(A^{h^*}\right)$. Комбинируя (2.7.11) и (2.7.12), заключаем, что если $\mu^n(A) = \nu^n(i^{-1}(A)) \geq p$, то

$$\mu^n\big(A^{h^*}\big) = \nu^n\big(i^{-1}(A^{h^*})\big) \geq \nu^n\Big(\big(i^{-1}(A)\big)^h\Big) \geq \frac{p}{p + (1-p)e^{-h}}.$$

То есть, мы пришли к (2.7.3) для меры μ, что и влечет a).

Теорема доказана.

Чтобы доказать теорему 2.7.3, нам потребуются исследовать последовательные максимумы $\xi_n = \max\{\zeta_1, \cdots, \zeta_n\}$ отдельно. Как обычно, через $m_p(\xi)$ мы обозначаем наименьшую квантиль порядка $p \in (0,1)$.

Лемма 2.7.2. Следующие свойства эквивалентны:

1a) для некоторых $p \in (0,1)$ и $h > 0$ $\inf_n \mathbf{P}\left\{\xi_n - m_p(\xi_n) \leq h\right\} > p$;

1b) для некоторых $p \in (0,1)$ и $h < 0$ $\sup_n \mathbf{P}\left\{\xi_n - m_p(\xi_n) \leq h\right\} < p$;

1c) для некоторой последовательности $a_n \in \mathbf{R}$

$$\sup_n \mathbf{P}\left\{|\xi_n - a_n| > h\right\} \to 0 \quad \text{при} \quad h \to +\infty;$$

2) для всех (эквивалентно: для некоторого) $a \in \mathbf{R}$ функция T_μ имеет конечный модуль на интервале $x \geq a$;

3) существует $\varepsilon > 0$, такое что $\sup_n \mathbf{E}e^{\epsilon(\xi_n - m_p(\xi_n))} < +\infty$ для всех $p \in (0,1)$,

Доказательство леммы 2.7.2. Нам будет удобнее использовать еще одно эквивалентное условие:

4) для всех (эквивалентно: для некоторого) $a \in \mathbf{R}$ функция $V(x) = F^{-1}(\exp(-\exp(-x)))$ имеет конечный модуль на интервале $x \geq a$. Кроме того, для всех $p \in (0,1)$ и $h > 0$

$$\sup_n \mathbf{P}\left\{\xi_n - m_p(\xi_n) > V_p^*(h)\right\} \leq \mathbf{P}\left\{Z - m_p(Z) > h\right\}, \tag{2.7.13}$$

где случайная величина Z имеет двойное экспоненциальное распределение $\mathbf{P}\{Z \le x\} = \exp(-\exp(-x))$, и где V_p^* означает модуль, порожденный V на интервале $[-\log\log(1/p), +\infty)$.

Имея правые хвосты (то есть, хвосты в окрестности точки $+\infty$), в существенном не отличающиеся от правых хвостов меры ν, случайная величина Z обладает следующим замечательным свойством: если $Z_1, \dots, Z_n$ – независимые копии Z (и сами независимые в совокупности), то случайная величина $\max\{Z_1, \cdots, Z_n\}$ имеет такое же распределение, что и $Z + \log n$, и следовательно случайные величины ξ_n и $V(Z + \log n)$ одинаково распределены. Это свойство неявно используется на следующем основном шаге.

$1a) \Rightarrow 4)$: пусть $p, q \in (0,1)$ и $h_0 > 0$ такие, что $q > p$ и

$$\inf_n \mathbf{P}\{\xi_n - m_p(\xi_n) \le h_0\} \ge q,$$

то есть, $F(F^{-1}(p^{1/n}) + h_0) \ge q^{1/n}$. По определению F^{-1}, это равносильно тому, что

$$F^{-1}(q^{1/n}) - F^{-1}(p^{1/n}) \le h_0. \tag{2.7.14}$$

Полагая $a_0 = -\log\log(1/p)$, $b_0 = -\log\log(1/q)$, (2.7.14) может быть записано как

$$V(b_0 + \log n) - V(a_0 + \log n) \le h_0, \tag{2.7.15}$$

справедливое для всех $n \ge 1$. Нам нужно вывести из (2.7.15), что

$$V_p^*(h) = \sup\{V(y) - V(x) : a \le x \le y,\, y - x \le h\} < +\infty \tag{2.7.16}$$

для всех $a \in \mathbf{R}$ и $h > 0$. Так как V – неубывающая функция, свойство (2.7.16) не зависит от a и h, и поэтому можно взять $a = a_0$, $h = h_0$ (именно при таком значении a $V_p^*(h)$ было определено выше в 4)).

Зафиксируем любое $c \in \mathbf{R}$, такое что $1 < c < e^{b_0 - a_0}$, и пусть n_0 – любое натуральное число, такое что

$$\log(n_0 + 1) - \log n_0 \le b_0 - a_0 \quad \text{и} \quad (e^{b_0 - a_0} - c)\, n_0 \ge 1. \qquad (2.7.17)$$

Чтобы доказать (2.7.16), можно рассматривать x и y с условием $a_0 + \log(n_0) \le x \le y$. Определим последовательность $n_k, k \ge 1$, по индукции. Пусть n_1 – наибольшее целое число, такое что $a_0 + \log n_1 \le x$. Если $k \ge 1$, пусть n_{k+1} – наибольшее целое число, такое что $a_0 + \log n_{k+1} \le b_0 + \log n_k$. Тогда $n_0 \le n_k < n_{k+1}$ для всех $k \ge 1$, поскольку $a_0 + \log(n_k + 1) \le b_0 + \log n_k$, что верно в силу (2.7.17) и того, что $n_k \ge n_0$.

Обозначим через K наименьшее k, такое что $b_0 + \log(n_k) \ge y$. По построению, интервалы

$$\Delta_k = [a_0 + \log n_k, b_0 + \log n_k], \quad 1 \le k \le K,$$

покрывают интервал $[x, y]$, поэтому с учетом (2.7.15)

$$V(y) - V(x) \le \sum_{k=1}^{K} \left[V(b_0 + \log n_k) - V(a_0 + \log n_k) \right] \le K h_0.$$

Наша цель – найти оценку сверху для K, зависящую только от $y - x$; мы бы тогда получили оценку для $V(y) - V(x)$ в терминах $y - x$. Обозначим через $[u]$ целую часть числа u. Тогда $n_{k+1} = \left[e^{b_0 - a_0} n_k \right]$, следовательно

$$n_{k+1} \ge e^{b_0 - a_0} n_k - 1 \ge c\, n_k,$$

так как $n_k \ge n_0$ и $e^{b_0 - a_0} n_0 \ge c\, n_0 + 1$. Легко по индукции показать, что $n_k \ge c^{k-1} n_1$, то есть, $\log n_k \ge (k - 1) \log c + \log n_1$. Таким образом неравенство $b_0 + \log n_k \ge y$ будет выполняться, как только $b_0 + (k-1) \log c + \log n_1 \ge y$, что можно записать как неравенство

$$k \ge 1 + \frac{y - b_0 - \log n_1}{\log c}. \qquad (2.7.18)$$

По определению n_1, мы также имеем $\log(n_1+1) > x-a_0$, и так как $\log(n_1+1) - \log n_1 \le b_0 - a_0$, справедливо $\log n_1 > x - b_0$. Поэтому (2.7.18) будет выполняться, как только $k \ge 1 + (y-x)/\log c$. Следовательно

$$K \le 2 + \frac{y-x}{\log c}\,.$$

Таким образом, (2.7.16), то есть, первая часть 4) доказана. Чтобы доказать вторую часть, зафиксируем $p \in (0,1)$, $h > 0$ и положим $q = \mathbf{P}\{Z - m_p(Z) \le h\}$, $a = -\log\log(1/p)$, $b = -\log\log(1/q)$. Как легко проверить, $b - a = h$. На предыдущем шаге ме видели, что неравенства вида

$$\mathbf{P}\{\xi_n - m_p(\xi_n) \le V_p^*(h)\} \ge q \tag{2.7.19}$$

эквивалентны (2.7.15): $V(b+\log n) - V(a+\log n) \le V_p^*(h)$ (здесь $V_p^*(h)$ формально выступает в роли h_0). Но в силу того, что $b - a = h$, последнее неравенство справедливо просто по определению V_p^*. Остается заметить, что (2.7.19) совпадает с (2.7.13).

4) $\Rightarrow$ 1a): пусть $p = \exp(-\exp(-a))$. Как и на предыдущем шаге, 1а) равносильно тому, что

$$V(b+\log n) - V(a+\log n) \le h$$

для некоторых $b > a$, $h > 0$ и всех $n \ge 1$. Это верно, так как $V(b+\log n) - V(a+\log n) \le V_p^*(b-a) < +\infty$.

1a) $\Longleftrightarrow$ 1b): заметим (вспоминая вывод (2.7.14)), что для всех $0 < p < q < 1$ и всех $h > 0$

$$\mathbf{P}\{\xi_n - m_p(\xi_n) < h\} \ge q \Longleftrightarrow \mathbf{P}\{\xi_n - m_q(\xi_n) \le -h\} < p. \tag{2.7.20}$$

4) $\Rightarrow$ 1c): полагая $a_n = m_p(\xi_n)$, получаем из (2.7.13), что при $h \to +\infty$ $\sup_n \mathbf{P}\{\xi_n - a_n > h\} \to 0$. Для оценивая вероятностей левых уклонений воспользуемся (2.7.20). Пусть теперь q фиксировано (но любое), $a_n = m_q(\xi_n)$, а в роли h выступает $V_p^*(h) + \varepsilon$

с $\varepsilon > 0$: для всех $p \in (0,q)$ $\mathbf{P}\{\xi_n - m_p(\xi_n) < V_p^*(h)+\varepsilon\} \geq q \Longleftrightarrow$ $\mathbf{P}\{\xi_n - m_q(\xi_n) \leq -(V_p^*(h)+\varepsilon)\} < p$. Устремляя $\varepsilon \to 0$, имеем

$$\mathbf{P}\{\xi_n - m_p(\xi_n) \leq V_p^*(h)\} \geq q \Longleftrightarrow$$
$$\mathbf{P}\{\xi_n - m_q(\xi_n) \leq -h'\} < p \quad \text{для всех} \quad h' > V_p^*(h) \tag{2.7.21}$$

Если взять $p \in (0,q)$ таким, чтобы $q = \mathbf{P}\{Z - m_p(Z) \leq h\}$, то есть, таким что $\log\log(1/p) - \log\log(1/q) = h$, то первое неравенство в (2.7.21) будет выполняться в силу (2.7.13), следовательно будет выполняться и второе неравенство в (2.7.21). Остается заметить, что $p \to 0$ при $h \to +\infty$ и, так как величина $V_p^*(h)$ конечна (хоть и может быстрее возрастать к $+\infty$ при $p \to 0$ по сравнению с аддитивными модулями на всей прямой), заключаем, что $\sup_n \mathbf{P}\{\xi_n - a_n < -h'\} \to 0$ при $h' \to +\infty$.

1c) $\Rightarrow$ 1a): как уже отмечалось, свойство 1a) не зависит от p, и можно считать $p = 1/2$. По предположению существует h_0, такое что $\mathbf{P}\{|\xi_n - a_n| > h_0\} < 1/2$ для всех $n \geq 1$. Следовательно $|m_p(\xi_n) - a_n| \leq h_0$. Поэтому при $h \to +\infty$

$$\sup_n \mathbf{P}\{\xi_n - m_p(\xi_n) > h\} \leq \sup_n \mathbf{P}\{\xi_n - a_n > h - h_0\} \to 0.$$

2) $\Longleftrightarrow$ 4): положим $S(x) = -\log\log(1+e^{-x})$, $x \in \mathbf{R}$, так что $T_\mu(x) = V(S(x))$ для всех x. Очевидно, S – возрастающая биекция из $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}$, имеет конечную липшицеву константу на интервалах $[a,+\infty)$, и то же самое относится к обратной функции S^{-1}. Поэтому T_μ имеет конечный модуль на $[a,+\infty)$ тогда и только тогда, когда V имеет конечный модуль на $[a,+\infty)$.

Наконец, очевидно, 4) влечет 3), что, в свою очередь, влечет 1a). Лемма 2.7.2 доказана.

Доказательство теоремы 2.7.3. Свойство b) и (2.7.3) влекут (см. (2.3.2))

$$\mathbf{P}\{g(\zeta) - m_p(g(\zeta)) \geq h^*\} \leq \mathbf{P}\{\eta - m_p(\eta) \geq h\}, \quad h > 0,$$

где $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$, случайная величина η имеет распределение ν, а g – ρ_∞-липшицевая функция на $\mathbf{R}^n$ (с липшицевой нормой $\|g\|_{Lip} \le 1$). Применяя это неравенство к $g_1(x) = \max\{x_1, \ldots, x_n\}$ и $g_2(x) = \min\{x_1, \ldots, x_n\}$, получаем c_1) и c_2).

Обратно: очевидно, c_1) влечет свойство $1c$) из леммы 2.7.2, и следовательно T_μ имеет конечный модуль на полуоси $[0, +\infty)$. Аналогично, c_2) влечет те же самые свойства, но для случайной величины $-\zeta_1$, то есть, для вероятностной меры μ_1 – образа μ при отображении $x \to -x$. Так как $T_{\mu_1}(x) = -T_\mu(-x)$, T_μ имеет конечный модуль на полуоси $(-\infty, 0]$. Следовательно T_μ имеет конечный модуль на всей прямой. Теорема 2.7.3 доказана.

§ 2.8. Примечания

Результаты §§ 2.1, 2.2 и 2.4 были получены в [73] (теорема 2.4.1 в ошибочной форме была ранее анонсирована в [69]). Теорема 2.3.1 доказана в [71]. В частном случае теоремы 2.3.1, когда распределение μ – логистическое, свойство экстремальности полупространств доказано на основе другой функциональной формы в [78].

Теоремы 2.5.2, 2.6.1 и 2.6.2 доказаны в [1], [2] и [70] (анонсированы в [3]), причем теорема 2.5.2 была получена на основе теоремы 2.6.1. Здесь же мы предпочли привести другое (на наш взгляд более простое) доказательство теоремы 2.5.2, основанное на удачном выборе U-операции в теореме 2.1.1. В [2] и [70] теорема 2.5.2 применялась к случайным процессам, линейно порожденным независимыми одинаково распределенными величинами, при изучении их выборочного поведения и, в частности, связанного с ними эффекта осцилляции. Отметим, что на такие процессы переносятся многие результаты работы [7] о гауссовской осцилляции.

Результаты § 2.7 основаны на работе [82]. Теорема 2.7.2 уточняет следующее наблюдение, сделанное Талаграном [216]: свойство a) влечет конечность экспоненциального момента с.в. ζ_1. Вопросы, связанные с распределением последовательных максимумов независимых одинаково распределенных величин, изучаются в теории экстремальных порядковых статистик, и им посвящена обширнейшая литература (см. напр. Галамбош [13]). В работе де Хаана и Риддера [141] получена следующая характеризация свойства относительной компактности семейства распределений с.в. $\max\{\zeta_1, \ldots, \zeta_n\} - a_n$ (при подходящих занчениях a_n): существуют $\varepsilon \in (0,1)$, $x_0 \in \mathbf{R}$ и $h_0 > 0$, такие что

$$1 - F(x+h) \le \varepsilon\,(1 - F(x)), \quad x \ge x_0,\ h \ge h_0,$$

где F – функция распределения с.в. ζ_i. Такое утверждение доказано при условии непрерывности F.

ГЛАВА III. ДИСКРЕТНЫЕ ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

§ 3.1. Функциональная форма изопериметрических неравенств для продакт-мер в пространствах с расстоянием евклидового типа

Пусть I – непрерывная неотрицательная функция на [0,1], такая что $I(0) = I(1) = 0$. Для дифференциальных изопериметрических неравенств

$$\mu^+(A) \geq I(\mu(A)), \quad A \subset M, \tag{3.1.1}$$

в метрическом вероятностном пространстве (M, ρ, μ) мы использовали функциональную форму

$$I(\mathbf{E}g) - \mathbf{E}I(g) \leq \mathbf{E}|\nabla g|, \quad 0 \leq g \leq 1. \tag{3.1.2}$$

Одно из достоинств (3.1.2) состоит в том, что такие функциональные неравенства легко распространяются на многомерные пространства $(M^n, \rho_\infty, \mu^n)$ с равномерной метрикой $\rho_\infty(x, y) = \max_{i \leq n} \rho(x_i, y_i)$ (в более общей ситуации индукционный шаг был осуществлен в § 2.1). Как результат, располагая "одномерным" неравенством (3.1.2), мы получаем многомерный вариант (3.1.1) для μ^n-периметра в смысле равномерной метрики:

$$(\mu^n)^+(A) \geq I(\mu^n(A)), \quad A \subset M^n. \tag{3.1.3}$$

Конечно, не всегда (3.1.1) влечет (3.1.2) – некоторые предположения о функции I необходимы ("почти" минимальные условия на I приведены в теореме 1.4.1). Если же мы хотим установить (3.1.3) по отношению к расстоянию евклидового типа

$$\rho_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \rho(x_i, y_i)^2}, \quad x, y \in M^n,$$

то и этих условий недостаточно – неравенство (3.1.2) в общем случае не может быть распространено на многомерный случай. Например, как мы уже знаем, для логистической меры μ на прямой $M = \mathbf{R}$ (3.1.1) и (3.1.2) выполняются с (оптимальной) функцией $I(p) = p(1-p)$, при этом (3.1.2) принимает вид

$$\mathrm{Var}(g) \leq \mathbf{E}|\nabla g|, \quad 0 \leq g \leq 1.$$

Но это неравенство перестает быть верным уже в $\mathbf{R}^2$, так как оно повлекло бы экстремальное свойство полупространств $\{(x_1, x_2) : x_1 \leq c\}$ в изопериметрической задаче для $(\mathbf{R}^2, \rho_2, \mu^2)$. А это возможно только для гауссовских мер (см. теорему 3.1.3).

Таким образом, функциональная форма (3.1.2) для одномерных изопериметрических неравенств (3.1.1) недостаточно сильна, чтобы применять индукцию при доказательстве многомерных изопериметрических неравенств (3.1.3) по отношению к евклидовой метрике. В действительности, попытки осуществить индукционный шаг при доказательстве многомерного неравенства (3.1.2) приводят к более сильной гипотезе, а именно, к неравенству

$$I(\mathbf{E}g) \leq \mathbf{E}\sqrt{I(g)^2 + |\nabla g|^2}, \quad 0 \leq g \leq 1. \tag{3.1.4}$$

При этом оказывается, что само неравенство (3.1.4) обладает по отношению к ρ_2 тем же свойством, что и (3.1.2) по отношению к ρ_∞: как только (3.1.4) выполняется в "одномерном" пространстве (M, ρ, μ), то это неравенство распространяется без каких-либо изменений и без каких-либо предположений о функции I на "многомерное" пространство (M^n, ρ_2, μ^n). Так же, как и (3.1.2), на индикаторных функциях $g = 1_A$ (точнее, приближая индикаторные функции липшицевыми в соответствии с леммой 1.4.1), (3.1.4) превращается в изопериметрическое неравенство (3.1.1) или, более общо, – в (3.1.3). Следует, однако, подчеркнуть, что индукционный шаг основывается на тождестве

$$|\nabla g(x)|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\nabla_{x_i} g(x)|^2, \qquad (3.1.5)$$

где $|\nabla_{x_i} g(x)|$ означает модуль градиента функции $x_i \to g(x)$ (значения x_j при $j \neq i$ фиксированы). Поэтому надо либо принять (3.1.5) за определение модуля градиента функций на M, либо придерживаться первоначального определения 1.4.1

$$|\nabla g(x)| = \limsup_{\rho_2(x,y)\to 0^+} \frac{|g(x) - g(y)|}{\rho_2(x,y)}, \qquad x \in M,$$

и требовать, чтобы (3.1.5) выполнялось для μ^n-почти всех $x \in M^n$. Более точно, имеет место следующее утверждение.

Пусть $(M_i, \rho_i, \mu_i)_{1\le i\le n}$ – метрические вероятностные пространства. Рассмотрим произведение $M = M_1 \times \cdots \times M_n$ с метрикой $\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \rho_i(x_i,y_i)^2}$, $x, y \in M$, и мерой $\mu = \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$. Будем говорить, что g липшицева, если $\|g\|_{Lip} < \infty$.

Теорема 3.1.1. Предположим, что для $(M_i, \rho_i, \mu_i)_{1\le i\le n}$ выполняются неравенства (3.1.4) в классе всех липшицевых функций $g : M_i \to [0,1]$ (I – произвольная неотрицательная непрерывная функция на [0,1], общая для всех неравенств). Предположим также, что (3.1.5) выполняется для всех липшицевых функций g на M для μ-почти всех $x \in M$. Тогда (3.1.4) выполняется в (M, ρ, μ) для всех μ-измеримых липшицевых функций $g : M \to [0,1]$.

Второе условие теоремы всегда выполнено в важном случае, когда $M_i = \mathbf{R}^{k_i}$ (с евклидовой метрикой) и меры μ_i абсолютно непрерывны относительно меры Лебега. Действительно, по известной теореме Радемахера, липшицевы функции на $\mathbf{R}^n$ почти всюду дифференцируемы, а в точках, где они дифференцируемы, (3.1.5) всегда справедливо.

Условие μ-измеримости g в утверждении теоремы необходимо, так как μ как продакт-мера определена в общем случае (когда

M_i не сепарабельны) на меньшей σ-алгебре, чем σ-алгебра всех борелевских множеств в M, и поэтому липшицевы функции в M могут быть не измеримы по отношению к μ.

Заметим также, что мы не требуем, чтобы $I(0) = I(1) = 0$. Последнее, однако, важно при переходе от (3.1.4) к (3.1.1).

На самом деле утверждение теоремы 1.3.1 носит более универсальный характер в том смысле, что роль метрики ρ не является определяющей. Вместо модулей градиентов можно рассматривать вообще любые "выпуклые" операторы, лишь бы выполнялось условие (3.1.5). Так как в дальнейшем мы будем иметь дело также с другими структурами, не определяемыми какой-либо метрикой, приведем один аналог теоремы 1.3.1.

Пусть (M_i, μ_i), $1 \le i \le n$, – вероятностные пространства. Рассмотрим произведение $M = M_1 \times \cdots \times M_n$ с мерой $\mu = \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$. Для каждого i пусть задан некоторый оператор Γ_i, определенный на семействе всех измеримых функций g_i на M_i со значениями в [0,1], при этом $\Gamma_i(g_i)$ – измеримые функции на M_i со значениями в $[0, +\infty]$. Мы также предполагаем, что $\Gamma_i(g_i) = \Gamma_i(g_i')$ μ_i-п.н., если $g_i = g_i'$ μ_i-п.н. Для каждой измеримой функции g на M определим

$$\Gamma(g) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Gamma_i(g_i)^2}, \tag{3.1.6}$$

где g_i – функция переменной $x_i \in M_i$, определяемая равенством $g_i(x_i) = g(x)$, $x \in M$ (значения $x_j \in M_j$ при $j \ne i$ фиксированы).

Будем предполагать, что выполняется следующее условие типа выпуклости: для любого вероятностного пространства (Y, ν) и любой измеримой функции g на $Y \times M_i$ со значениями в [0,1] функция $y \to \Gamma_i(g(y, x_i))$ ν-измерима, причем

$$\Gamma_i(\mathbf{E}_\nu g(y, x_i)) \ \le \ \mathbf{E}_\nu \Gamma_i(g(y, x_i)) \tag{3.1.7}$$

для μ_i-почти всех x_i. При некоторых предположениях о Γ_i типа непрерывности это условие может быть упрощено:

$$\Gamma_i(tg + (1-t)h) \le t\Gamma_i(g) + (1-t)\Gamma_i(h)$$

(g и h – произвольные измеримые функции на M_i со значенями в [0,1], $0 \le t \le 1$).

Теорема 3.1.2. Пусть I – неотрицательная измеримая (по Борелю) функция на $[0,1]$. Предположим, что для каждого $i \le n$ и всех измеримых функций g на M_i со значениями в [0,1] выполняется неравенство

$$I(\mathbf{E}_{\mu_i} g) \le \mathbf{E}_{\mu_i} \sqrt{I(g)^2 + \Gamma_i(g)^2}. \tag{3.1.8}$$

Тогда для всех измеримых функций g на M со значениями в [0,1]

$$I(\mathbf{E}_{\mu} g) \le \mathbf{E}_{\mu} \sqrt{I(g)^2 + \Gamma(g)^2}. \tag{3.1.9}$$

Доказательство теоремы 3.1.2 проведем по индукции. Пусть $n \ge 2$. Допустим, что утверждение теоремы справедливо для числа вероятностных пространств, меньшего, чем n. Введем пространство $Y = M_1 \times \cdots \times M_{n-1}$ с мерой $\nu = \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_{n-1}$, так что $M = Y \times M_n$, $\mu = \nu \otimes \mu_n$. На семействе всех измеримых функций на Y со значениями в [0,1] определим оператор D так же, как и в (3.1.6) для набора $(M_i, \mu_i, \Gamma_i)_{1 \le i \le n-1}$. Точки Y будем обозначать через $y = (x_1, \ldots, x_{n-1})$. Имеем:

$$\Gamma(g(y, x_n))^2 = D(g(y, x_n))^2 + \Gamma_n(g(y, x_n))^2$$

(в первом слагаемом фиксируется x_n, во втором – y). Зафиксируем $x_n \in M_n$ и положим

$$u(y) = \sqrt{I(g(y, x_n))^2 + D(g(y, x_n))^2}, \quad v(y) = \Gamma_n(g(y, x_n)).$$

По теореме Фубини функция $y \to g(y, x_n)$ ν-измерима для μ_n-почти всех x_n, и для таких x_n, в силу индукционного предположения,

$$\mathbf{E}_\nu u(y) \geq I(\mathbf{E}_\nu g(y, x_n)). \tag{3.1.10}$$

Далее, по условию функция v тоже ν-измерима для μ_n-почти всех x_n, причем выполняется условие выпуклости (3.1.7), то есть,

$$\mathbf{E}_\nu v(y) \geq \Gamma_n(\mathbf{E}_\nu g(y, x_n)). \tag{3.1.11}$$

Учитывая (3.1.10)–(3.1.11) и применяя элементарное неравенство $\int \sqrt{u^2 + v^2} \geq \sqrt{\left(\int u\right)^2 + \left(\int v\right)^2}$, получаем для μ_n-почти всех $x_n \in M_n$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_\nu \sqrt{I(g(y, x_n))^2 + \Gamma(g(y, x_n))^2} &= \mathbf{E}_\nu \sqrt{u^2 + v^2} \\
&\geq \sqrt{(\mathbf{E}_\nu u)^2 + (\mathbf{E}_\nu v)^2} \\
&\geq \sqrt{I(\mathbf{E}_\nu g(y, x_n))^2 + (\mathbf{E}_\nu g(y, x_n))^2} \\
&= \sqrt{I(w)^2 + \Gamma_n(w)^2},
\end{aligned}$$

где $w(x_n) = \mathbf{E}_\nu g(y, x_n)$. Эта функция корректно определена, μ_n-измерима и принимает значения в [0,1]. Поэтому в силу (3.1.8) при $i = n$ и $g = w$, $I(\mathbf{E}_{\mu_n} w) \leq \mathbf{E}_{\mu_n} \sqrt{I(w)^2 + \Gamma_n(w)^2}$. Следовательно по теореме Фубини

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_\mu \sqrt{I(g)^2 + \Gamma(g)^2} &= \mathbf{E}_{\mu_n} \mathbf{E}_\nu \sqrt{I(g(y, x_n))^2 + \Gamma(g(y, x_n))^2} \\
&\geq \mathbf{E}_{\mu_n} \sqrt{I(w)^2 + \Gamma_n(w)^2} \\
&\geq I(\mathbf{E}_{\mu_n} w) = I(\mathbf{E}_\mu g),
\end{aligned}$$

то есть (3.1.9). Теорема 3.1.2 доказана.

Доказательство теоремы 3.1.1 ничем не отличается. Нужно лишь заметить, что для липшицевых функций g на M функции w будут также липшицевыми, а условие (3.1.7) выполняется для операторов $\Gamma_i(g) = |\nabla_{x_i} g|$ непосредственно в силу определения 1.4.1 и теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла.

Наконец, докажем упомянутую характеризацию гауссовских мер через изопериметрическое свойство стандартных полупространств. Напомним, что стандартными мы называем полупространства в $\mathbf{R}^n$ вида $A = \{x \in \mathbf{R}^n : x_1 \leq c\}$. A^h $(h > 0)$ означает открытую h-крестность множества $A \subset \mathbf{R}^n$ в смысле евклидовой метрики.

Теорема 3.1.3. Пусть $n \geq 2$. Пусть μ – вероятностная мера на прямой $\mathbf{R}$ со следующим свойством: для всех $p \in (0,1)$ и $h > 0$ $\mu^n(A^h)$ достигает наименьшее значение в классе всех измеримых (по Борелю) множеств $A \subset \mathbf{R}^n$ меры $\mu^n(A) \geq p$ на некотором стандартном полупространстве. Тогда мера μ – гауссовская.

Доказательство. Применяя условия к цилиндрическим множествам вида $A \times \mathbf{R}^{n-1}$, $A \subset \mathbf{R}$, получаем, что в одномерной изопериметричской задаче полуоси $(-\infty, c]$ обладают экстремальным свойством. Следовательно μ должна быть симметричной (относительно своей медианы) и имееть конечный экспоненциальный момент (см. § 1.2). Не умаляя общности, будем считать, что μ симметрична относительно 0.

Аналогично полупространства вида $B(c) = (-\infty, c] \times \mathbf{R}$ обладают экстремальным свойством в двумерной изопериметричской задаче: для всех $p \in (0,1)$ и $h > 0$ и для всех $A \subset \mathbf{R}^2$ меры $\mu^2(A) \geq p$ существует $c \in \mathbf{R}$, такое что $\mu^2(B(c)) \geq p$ и

$$\mu^2(A^h) \geq \mu^2(B(c)^h). \tag{3.1.12}$$

Применим (3.1.12) при $p = 1/2$ к множеству

$$A(c) = \left\{(x_1, x_2) : \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}} \leq c\right\}$$

при $c = 0$. Очевидно, $\mu(A(0)) \geq 1/2$, и минимальное значение правой части в (3.1.12) достигается, в силу симметричности μ, при $c = 0$. Так как $A(0)^h = A(h)$, (3.1.12) можно записать в терминах независимых случайных величин ξ и η, определенных на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathbf{P})$ и имеющих общее распределение μ, как неравенство

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\xi+\eta}{\sqrt{2}} < h\right\} \geq \mathbf{P}\{\xi < h\},$$

справедливое при всех $h > 0$. Как следствие,

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}\left(\frac{\xi+\eta}{\sqrt{2}}\right) &= 4\int_0^{+\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\xi+\eta}{\sqrt{2}} > h\right\} h\,dh \\ &\leq 4\int_0^{+\infty} \mathbf{P}\{\xi > h\} h\,dh = \operatorname{Var}(\xi).\end{aligned}$$

Но $\operatorname{Var}\left((\xi+\eta)/\sqrt{2}\right) = \operatorname{Var}(\xi)$, следовательно для почти всех $h > 0$ (по отношению к мере Лебега) $\mathbf{P}\left\{(\xi+\eta)/\sqrt{2} > h\right\} = \mathbf{P}\{\xi > h\}$. Очевидно, это равенство распространяется на все $h > 0$, и таким образом, случайные величины $(\xi+\eta)/\sqrt{2}$ и ξ одинаково распределены. Следовательно характеристическая функция f меры μ удовлетворает уравнению $f^2(t/\sqrt{2}) = f(t)$ для всех $t \in \mathbf{R}$, что возможно только если f имеет вид $f(t) = \exp(-\sigma^2 t^2/2)$. Теорема 3.1.3 доказана.

§ 3.2. Изопериметрическое неравенство на дискретном кубе. Его связь с гауссовским изопериметрическим неравенством

Здесь мы применим теорему 3.1.2 в следующей ситуации: все (M_i, μ_i) представляют собой двуточечное пространство $\{-1, 1\}$ с бернуллиевской мерой, приписывающей одинаковую массу $\frac{1}{2}$ точкам 0 и 1. Произведение этих пространств – "n-мерный" дискретный куб $M = \{-1, 1\}^n$, снабженный равномерным распределением $\mathbf{P}$.

Каждая точка $x \in \{-1, 1\}^n$ имеет n соседей $s_i(x)$, $1 \le i \le n$, – ближайшие к x точки по каждому направлению: при $j \ne i$ $[s_i(x)]_j = x_j$, $[s_i(x)]_i = -x_i$.

Если функция g определена на дискретном кубе, то в каждой его точке можно определить дискретный градиент – вектор, составленный из приращений g вдоль каждого направления (с точностью до масштабного множителя). Длину этого вектора

$$\Gamma g(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Big|\frac{g(x) - g(s_i(x))}{2}\Big|^2}, \quad x \in \{-1, 1\}^n,$$

будем называть модулем дискретного градиента. В частности, для индикаторных функций $g = 1_A$

$$|\Gamma\, 1_A(x)|^2 = \frac{1}{4}\, card\{i \le n : (x \in A, s_i(x) \notin A) \text{ или } (x \notin A, s_i(x) \in A)\}.$$

Величину

$$\mathbf{P}^{\,+}(A) = \mathbf{E}\,|\Gamma\, 1_A|$$

будем называть дискретным периметром множества $A \subset \{-1, 1\}^n$.

Напомним, что мы используем стандартные обозначения

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-x^2/2\}, \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\, dt$$

соответственно для плотности и функции распределения гауссовской меры γ_1 на прямой $\mathbf{R}$. $\Phi^{-1} : [0,1] \to [-\infty, +\infty]$ обозначает функцию, обратную к Φ.

Теорема 3.2.1. Пусть $I(p) = \varphi(\Phi^{-1}(p))$, $0 \le p \le 1$. Для любой функции g на $\{-1,1\}^n$ со значениями в $[0,1]$

$$I(\mathbf{E}g) \le \mathbf{E}\sqrt{I(g)^2 + \Gamma(g)^2} \tag{3.2.1}$$

(математическое ожидание понимается в смысле меры $\mathbf{P}$). В частности, для любого множества $A \subset \{-1,1\}^n$

$$\mathbf{P}^{\,+}(A) \ge I(\,\mathbf{P}\,(A)). \tag{3.2.2}$$

Следствие 3.2.1. Пусть $I(p) = \varphi(\Phi^{-1}(p))$, $0 \le p \le 1$. Для любой локально липшицевой функции $g : \mathbf{R}^n \to [0,1]$

$$I(\mathbf{E}_{\gamma_n} g) \le \mathbf{E}_{\gamma_n} \sqrt{I(g)^2 + |\nabla g|^2}. \tag{3.2.3}$$

В частности, для любого измеримого множества $A \subset \mathbf{R}^n$

$$\gamma_n^+(A) \ge I(\gamma_n(A)). \tag{3.2.4}$$

Таким образом, дискретные неравенства (3.2.1)–(3.2.2) влекут (3.2.4) – гауссовское изопериметрическое неравенство в дифференциальной форме (см. (1.5.2)). Иначе: $I = I_\gamma$ является изопериметрической функцией гауссовской меры γ_n в $\mathbf{R}^n$.

Действительно, чтобы вывести (3.2.3), применим (3.2.1) на nk-мерном дискретном кубе к функциям вида

$$g_k(x_1, \ldots, x_k) = g\Big(\frac{x_1 + \ldots + x_k}{\sqrt{k}}\Big), \quad x_1, \ldots, x_k \in \{-1,1\}^n,$$

предполагая, что g имеет ограниченные частные производные первого и второго порядков. В силу центральной предельной теоремы в $\mathbf{R}^n$,

$$\int_{\{-1,1\}^{nk}} g_k \, d\,\mathbf{P} \longrightarrow \int_{\mathbf{R}^n} g \, d\gamma_n \quad \text{при } k \to \infty.$$

Кроме того,

$$|\Gamma g_k(x_1,\dots,x_k)|^2 = \Big|\nabla g\big(\frac{x_1+\ldots+x_k}{\sqrt{k}}\big)\Big|^2 + O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

при $k\to\infty$ равномерно по всем $x_1,\dots,x_k\in\{-1,1\}^n$. Так как функция $|\nabla g|^2=\sum_{i=1}^n|\partial g/\partial x_i|^2$ напрерывна и ограничена, снова в силу центральной предельной теоремы в $\mathbf{R}^n$,

$$\int_{\{-1,1\}^{nk}}\sqrt{I(g_k)^2+|\Gamma g_k|^2}\,d\,\mathbf{P}\longrightarrow\int_{\mathbf{R}^n}\sqrt{I(g)^2+|\nabla g|^2}\,d\gamma_n$$

при $k\to\infty$. Следовательно (3.2.3) выполняется для функций g с ограниченными частными производными первого и второго порядков. С помощью простой аппроксимации (3.2.3) распространяется на все локально липшицевые функции со значениями в [0,1] (напомним, что такие функции почти всюду дифференцируемы по теореме Радемахера). Наконец, в силу неравенства $\sqrt{a^2+b^2}\le a+b$ $(a,b\ge 0)$, (3.2.3) влечет неравенство

$$I(\mathbf{E}_{\gamma_n}g)-\mathbf{E}_{\gamma_n}I(g)\le\mathbf{E}_{\gamma_n}|\nabla g|, \tag{3.2.5}$$

которое, как мы знаем (см § 1.5), является функциональной формой для (3.2.4).

Проведенное рассуждение также показывает, что гауссовская изопериметрическая функция – оптимальная в классе всех непрерывных функций I, удовлетворяющих дискретному функциональному неравенству (3.2.1) и таких что

$$I(0)=I(1)=0 \tag{3.2.6}$$

(без последнего условия бессмысленно рассматривать (3.2.1) или (3.2.3), так как на индикаторных функциях они не превращаются в изопериметрические неравенства). Действительно, если неотрицательная непрерывная функция I на [0,1] удовлетворяет

(3.2.1), то в силу центральной предельной теоремы, мы получаем (3.2.3) и следовательно (3.2.5), что, в свою очередь, в предположении (3.2.6) влечет (3.2.4). Но гауссовская изопериметрическая функция I_γ – максимально возможная в (3.2.4), поэтому $I \le I_\gamma$. Таким образом, $I = I_\gamma$ – максимально возможная в (3.2.1).

Однако, мы не можем сказать ничего об оптимальности неравенства (3.2.2) – дискретного аналога гауссовского изопериметрического неравенства. Так же, как и при переходе от (3.2.1) к (3.2.3), можно было бы ожидать, что по крайней мере для "гладких" множеств $B \subset \mathbf{R}^n$

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{P}^+\left\{(x_1,\dots,x_k) : x_i \in \{-1,1\}^n,\ \frac{x_1+\cdots+x_k}{\sqrt{k}} \in B\right\} = \gamma_n^+(B) \tag{3.2.7}$$

($\mathbf{P}$ – равномерное распределение на $\{-1,1\}^{nk}$). Неожиданно такое предположение неверно. Уже для полуплоскостей вида $B = \{(x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2 : b_1x_1 + b_2x_2 \le b\}$, $b_1^2 + b_2^2 = 1$, предел в (3.2.7) существует, но зависит от (b_1,b_2), в то время как $\gamma_n^+(B) = \varphi(b)$ не зависит от (b_1,b_2).

Более того, даже для одномерных множеств $B = (-\infty, b]$, то есть для множеств A в (3.2.2) вида

$$A_n(p) = \left\{x \in \{-1,1\}^n : \frac{x_1+\cdots+x_n}{\sqrt{n}} \le \Phi^{-1}(p)\right\}$$

мы имеем $\mu_n(A_n(p)) \to p$ в силу центральной предельной теоремы, в то время как $\mathbf{P}^+(A_n(p)) \to \sqrt{2}\,I(p)$ при $n \to \infty$ в силу локальной предельной теоремы Муавра–Лапласа. Таким образом, если гауссовская изопериметрическая функция I – оптимальная в (3.2.2), множества $A_n(p)$ не могут быть экстремальными в (3.2.2) даже в асимптотическом смысле.

Итак, дискретное изопериметрическое неравенство (3.2.2) по-видимому слабее, чем его функциональная форма (3.2.1). Сильнее ли тогда функциональное неравенство (3.2.3) для гауссовской меры по сравнению с гауссовским изопериметрическим неравенством (3.2.4) или (3.2.5)? Пусть g – гладкая функция на $\mathbf{R}^n$ со значениями в (0,1). Рассмотрим множество

$$A = \{(x,y) : x \in \mathbf{R}^n, y \in \mathbf{R},\ \Phi(y) < g(x)\} \subset \mathbf{R}^{n+1}.$$

Тогда (3.2.3) будет совпадать с (3.2.4), но в пространстве большей размерности $(\mathbf{R}^{n+1}, \gamma_{n+1})$. Действительно, в терминах функции $f = \Phi^{-1}(g)$ (3.2.3) запишется как неравенство

$$I(\gamma_{n+1}(A)) \le \int_{\mathbf{R}^n} \varphi_n(x)\, \varphi(f(x))\, \sqrt{1 + |\nabla f(x)|^2} dx. \tag{3.2.8}$$

Заметим также, что

$$\gamma_{n+1}^+(A) = \int_{\partial A} \varphi_{n+1}(z)\, dH_n(z) = \int_{\partial A} \varphi_n(x)\, \varphi(y)\, dH_n(x,y), \tag{3.2.9}$$

где $z = (x,y)$, а H_n – n-мерная мера Хаусдорфа в $\mathbf{R}^{n+1}$, то есть, правый интеграл в (3.2.9) берется по (лебеговой) поверхностной мере на границе ∂A. Эта поверхность определяется уравнением $y = f(x)$, причем $\sqrt{1 + |\nabla f(x)|^2} dx$ представляет собой элемент $dH_n(x,y)$ меры H_n в точке $(x,y) \in \partial A$. Следовательно, правые части в (3.2.8) и (3.2.9) совпадают, и значит (3.2.3) превращается в $(n+1)$-мерное изопериметрическое неравенство

$$I(\gamma_{n+1}(A)) \le \gamma_{n+1}^+(A), \tag{3.2.10}$$

то есть, (3.2.4) в $(\mathbf{R}^{n+1}, \gamma_{n+1})$. С учетом теоремы 3.1.1, неравенство (3.2.3) достаточно оценивать для размерности $n = 1$, и тогда (3.2.10) будет двумерным изопериметрическим неравенством. То есть, по сути (3.2.3) – это гауссовское изопериметрическое неравенство на плоскости.

Доказательство теоремы 3.2.1. В силу теоремы 3.1.2, достаточно рассмотреть случай $n = 1$. Вводя переменные $a = g(1)$, $b = g(-1)$, (3.2.1) запишется как неравенство

$$I\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{2}\sqrt{I(a)^2 + \left|\frac{a-b}{2}\right|^2} + \frac{1}{2}\sqrt{I(b)^2 + \left|\frac{a-b}{2}\right|^2}. \tag{3.2.11}$$

Зафиксируем $c \in (0,1)$ и введем функцию $u(x) = I(c+x)^2 + x^2$, $x \in \Delta(c) = (-\min(c, 1-c), \min(c, 1-c))$. Если положить $c = (a+b)/2$, $x = (a-b)/2$, то (3.2.11) можно переписать как

$$\sqrt{u(0)} \leq \frac{1}{2}\sqrt{u(x)} + \frac{1}{2}\sqrt{u(-x)}, \tag{3.2.12}$$

причем условие $a, b \in (0,1)$ будет эквивалентно условию $x \in \Delta(c)$. Умножая на 2 обе части (3.2.12) и возводя их в квадрат, приходим к неравенству

$$4u(0) - (u(x) + u(-x)) \leq 2\sqrt{u(x)u(-x)}. \tag{3.2.13}$$

Еще раз возводя в квадрат, но теперь (3.2.13) (заметим, что нет никакой необходимости проверять, что левая часть (3.2.13) неотрицательна), приходим к неравенству

$$16u(0)^2 + (u(x) - u(-x))^2 \leq 8u(0)(u(x) + u(-x)).$$

Перепишем это неравенство в терминах функции

$$h(x) = u(x) - u(0) = I(c+x)^2 + x^2 - I(c)^2 :$$

$$(h(x) - h(-x))^2 \leq 8I(c)^2(h(x) + h(-x)). \tag{3.2.14}$$

Лемма 3.2.1. *a*) $I \cdot I'' = -1$.
b) функция $(I')^2$ выпукла на $(0,1)$.

Доказательство. *a*) следует из тождества $\varphi'(x) = -x\varphi(x)$, $x \in \mathbf{R}$. *b*): $(I'^2)' = 2I'I'' = -2\,\dfrac{I'}{I}$, следовательно $(I'^2)'' = -2\,\dfrac{I''I - I'^2}{I^2} = 2\,\dfrac{1 + I'^2}{I^2} \geq 0$.

Лемма 3.2.2. Функция $R(x) = h(x) + h(-x) - 2I'(c)^2x^2$ выпукла на $\Delta(c)$.

Доказательство.

$$R'(x) = 2I(c+x)I'(c+x) - 2I(c-x)I'(c-x) + 4x - 4I'(c)^2x.$$

Следовательно

$$R''(x) = 4\left[\frac{I'(c+x)^2 + I'(c-x)^2}{2} - I'(c)^2\right]$$

неотрицательна, поскольку функция $(I')^2$ выпукла.

Продолжим доказательство теоремы 3.2.1. Поскольку функция R четна и в силу леммы 3.2.2, имеем $R(x) \geq R(0) = 0$ для всех $x \in \Delta(c)$. Следовательно

$$h(x) + h(-x) \geq 2\, I'(c)^2 x^2.$$

Поэтому (3.2.14) будет следовать из более сильного неравенства $(h(x) - h(-x))^2 \leq 16 I(c) I'(c)^2 x^2$, то есть, из неравенства

$$\left| \frac{h(x) - h(-x)}{x} \right| \leq 4 I(c) |I'(c)|.$$

Так как $h(x) - h(-x) = I(c+x)^2 - I(c-x)^2$, остается показать, что

$$\left| \frac{I(c+x)^2 - I(c-x)^2}{x} \right| \leq 4 I(c) |I'(c)|. \tag{3.2.15}$$

Поскольку функция I симметрична относительно точки $1/2$, обе части (3.2.15) не изменятся, если заменить c на $1-c$ (заметим также, что $\Delta(1-c) = \Delta(c)$). Поэтому можно предполагать, что $0 < c \leq \frac{1}{2}$. Кроме того, можно предполагать, что $x > 0$, так как левая часть (3.2.15) – четная функция x. При этих предположениях $I(c+x) \geq I(c-x)$, так как I возрастает на $[0, \frac{1}{2}]$, убывает на $[\frac{1}{2}, 1]$ и симметрична относительно $\frac{1}{2}$. Действительно, в силу этих свойств, $I(c+x) \geq I(c-x) \Longleftrightarrow 1 - (c+x) \geq c - x \Longleftrightarrow 1 \geq 2c$. Таким образом, (3.2.15) упрощается:

$$\frac{I(c+x)^2 - I(c-x)^2}{x} \;\leq\; 4 I(c) I'(c) \tag{3.2.16}$$

в предположении, что $0 < x < c \leq 1/2$. Рассмотрим функцию $v(x) = I(c+x)^2 - I(c-x)^2$. В силу леммы 3.2.1 a),

$$v''(x) = 2(I'(c+x)^2 - I'(c-x)^2).$$

Как выпуклая, симметричная относительно точки 1/2, функция, I'^2 убывает на $(0, \frac{1}{2}]$ и возрастает на $[\frac{1}{2}, 1)$. Следовательно $I'(c+x)^2 \leq I'(c-x)^2$ и, таким образом, $v''(x) \leq 0$, как только $0 < x < c \leq \frac{1}{2}$. Поэтому v – вогнутая неотрицательная функция на $[0, c]$. Но тогда

$$\frac{v(x)}{x} = \int_0^1 v'(xt)\ dt$$

не возрастает на $(0, c]$, и остается проверить (3.2.16) в точке $x = 0$. Так как

$$I(c+x)^2 = I(c)^2 + 2I(c)I'(c)x + O(x^2)$$

при $x \to 0$, имеем $\frac{u(x)}{x} \to 4I(c)I'(c)$. Теорема 3.2.1 доказана.

§ 3.3. Изопериметрическое неравенство для несимметричного распределения Бернулли. Абстрактное изопериметрическое неравенство гауссовского типа

Немного изменим обозначения. Под "n-мерным" дискретным кубом будем понимать произведение $M = \{0,1\}^n$. Снабдим это пространство продакт мерой $\mathbf{P} = \mu_p^n$, у которой маргинальные распределения μ_p приписывают массу $p \in (0,1)$ точке 1 и массу $q = 1 - p$ – точке 0.

Для каждая точки $x \in \{0,1\}^n$ $s_i(x)$, $1 \le i \le n$, обозначает точку с координатами $[s_i(x)]_j = x_j$ при $j \ne i$, $[s_i(x)]_i = 1 - x_i$.

Для функций g, определенных на дискретном кубе, мы берем $\sqrt{pq}$ в качестве масштабного множителя для модуля дискретного градиента:

$$\Gamma g(x) = \sqrt{pq \sum_{i=1}^{n} |g(x) - g(s_i(x))|^2}, \quad x \in \{0,1\}^n,$$

так что при $p = 1/2$ мы получаем предыдущее определение. С подмножеством $A \subset \{0,1\}^n$ свяжем функцию

$$h_A(x) = card\{i \le n : (x \in A, s_i(x) \notin A) \text{ или } (x \notin A, s_i(x) \in A)\}$$

– число граничных ребер, у которых x служит одной из вершин. В частности, $|\Gamma\, 1_A(x)|^2 = pq\, h_A(x)$.

При этих обозначениях дискретное изопериметрическое неравенство (3.2.2) можно записать в виде

$$\int \sqrt{h_A}\, d\mathbf{P} \ \ge\ \frac{1}{\sqrt{pq}}\, I(\mathbf{P}(A)), \quad p = \frac{1}{2}, \tag{3.3.1}$$

где I – гауссовская изопериметрическая функция. Естественный вопрос: остается ли (3.3.1) справедливым при $p \ne \dfrac{1}{2}$? Ответ оказывается отрицательным. Действительно, если применить неравенство вида

$$\int \sqrt{h_A}\, d\,\mathbf{P} \;\geq\; \frac{1}{\sqrt{pq}}\, I_0(\,\mathbf{P}\,(A))$$

с оптимальной функцией I_0 (не зависящей от размерности) к одноточечному множеству $A = \{(0,\ldots,0)\}$, то получим

$$\sqrt{pq}\;(\sqrt{n}p^n + np^{n-1}q) \geq I_0(p^n).$$

Полагая $p = t^{1/n}$, где $t \in (0,1)$ – фиксировано, и устремляя $n \to \infty$, получим в пределе

$$J(t) \equiv t\sqrt{\log(1/t)} \geq I_0(t).$$

Но функция $J(t)$ ведет себя как $\frac{1}{\sqrt{2}}\, I(t)$ при $t \to 0$, и поэтому $I_0(t) < I(t)$ для всех достаточно малых t (или, что равносильно, – для всех t, достаточно близких к 1).

Тем не менее, (3.3.1) справедливо с точностью до абсолютного множителя.

Теорема 3.3.1. Пусть $I(t) = \varphi(\Phi^{-1}(t))$, $0 \leq t \leq 1$. Для всех $A \subset \{0,1\}^n$

$$\int \sqrt{h_A}\, d\,\mathbf{P} \;\geq\; \frac{1}{\sqrt{2pq}}\, I(\,\mathbf{P}\,(A)). \tag{3.3.2}$$

Более того, для любой функции $g : \{0,1\}^n \to [0,1]$

$$I(\mathbf{E}g) \leq \mathbf{E}\sqrt{I(g)^2 + 2\Gamma(g)^2} \tag{3.3.3}$$

(математическое ожидание понимается в смысле меры $\mathbf{P}$).

Проверим, насколько оптимально неравенство (3.3.2), на примере полупространств, т.е., множеств вида

$$A_n(a) = \left\{ x \in \{0,1\}^n : \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq a \right\},$$

где $S_n = x_1 + \cdots + x_n$. Положим $k = \left[\, np + a\sqrt{npq}\,\right]$, где $[\cdot]$ обозначает целую часть числа. Очевидно,

$$h_{A_n(a)} = (n-k)\ 1_{\{S_n=k\}} + (k+1)\ 1_{\{S_n=k+1\}},$$

и в силу локальной теоремы Муавра–Лапласа,

$$\int \sqrt{h_{A_n(a)}}\, d\,\mathbf{P} \ = \sqrt{n-k}\ \ \mathbf{P}\,(S_n = k) + \sqrt{k+1}\ \ \mathbf{P}\,(S_n = k+1)$$
$$\longrightarrow\ \frac{\sqrt{p}+\sqrt{q}}{\sqrt{pq}}\,\varphi(a)$$

при $n \to \infty$. С другой стороны, в силу центральной предельной теоремы, $\mathbf{P}\,(A_n(a)) \to \Phi(a)$, и следовательно

$$\frac{1}{\sqrt{2pq}}\ I(\,\mathbf{P}\,(A_n(a))) \longrightarrow\ \frac{1}{\sqrt{2pq}}\,\varphi(a).$$

Так как $1 \leq \sqrt{p} + \sqrt{q} \leq \sqrt{2}$, зависимость правой части (3.3.2) от пары $(p, \mathbf{P}\,(A))$ оптимальна (с точностью до абсолютного множителя).

Мы получим (3.3.2)–(3.3.3) как следствие более общего утверждения. Пусть (M_i, μ_i), $1 \leq i \leq n$, – произвольные вероятностные пространства. Рассмотрим произведение $M = M_1 \times \cdots \times M_n$ с мерой $\mathbf{P}\ = \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$. Для каждой измеримой функции g на M определим так же, как и на дискретном кубе, (нормализованный) модуль градиента

$$\Gamma(g) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}_{x_i}(g)}$$

где $\mathrm{Var}_{x_i}(g)$ обозначает дисперсию g по переменнй x_i в смысле меры μ_i (в то время, как другие переменные фиксированы).

Для измеримых множеств $A \subset M$ величину $\mathbf{P}^{\,+}(A) = \mathbf{E}\Gamma(1_A)$ можно рассматривать как своего рода $\mathbf{P}$-периметр A.

Имеет место

Теорема 3.3.2. Для любой измеримой функции $g : M \to [0,1]$

$$I(\mathbf{E}g) \le \mathbf{E}\sqrt{I(g)^2 + 2\,\Gamma(g)^2} \tag{3.3.4}$$

(математические ожидания понимаются в смысле меры $\mathbf{P}$). В частности, для любого измеримого $A \subset M$

$$\mathbf{P}^+(A) \ge \frac{1}{\sqrt{2}}\, I(\mathbf{P}(A)). \tag{3.3.5}$$

В случае, когда $M_i = \{0,1\}$ с мерой μ_p, (3.3.4) и (3.3.5) сводятся соответственно к (3.3.3) и (3.3.2). И как мы знаем, при $p = \frac{1}{2}$ множитель 2 в (3.3.4) можно убрать. Более того, других таких мер за исключением единичных масс больше нет (в классе продакт-мер $\mathbf{P}$), и в этом смысле симметричное распределение Бернулли играет особую роль. Чтобы показать это, применить при $n = 1$ правую часть (3.3.4) к функциям вида $g_\varepsilon = c + \varepsilon g$, где $0 < c < 1$, и g - ограниченная функция на M, такая что $\mathbf{E}g = 0$. При достаточно малых ε имеем $0 < g_\varepsilon < 1$, а разложение в ряд Тейлора правой части (3.3.4) по степеням ε имеет вид

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\sqrt{I(g_\varepsilon)^2 + \mathrm{Var}(g_\varepsilon)} &= \mathbf{E}\sqrt{I(c+\varepsilon g)^2 + \varepsilon^2\,\mathrm{Var}(g)} \\ &= I(c) + \frac{I'(c)}{6\,I(c)^2}\,\mathbf{E}g^3\,\varepsilon^3 + O\left(\varepsilon^4\right).\end{aligned}$$

Поэтому неравенство $I(c) = I(\mathbf{E}g_\varepsilon) \le \mathbf{E}\sqrt{I(g_\varepsilon)^2 + \mathrm{Var}(g_\varepsilon)}$ влечет $\mathbf{E}g^3 = 0$. Последнее может не выполняться, если мера μ_1 не имеет двуточечный носитель с массой $1/2$ в точках носителя.

Приступим к доказательству теоремы 3.3.2. В силу теоремы 3.1.2 для операторов $\Gamma_i(g) = \sqrt{2\,\mathrm{Var}_{x_i}(g)}$ (представляющих собой скорее функционалы), достаточно рассмотреть случай $n = 1$. То есть, нам следует установить неравенство

$$I(\mathbf{E}g) \le \mathbf{E}\sqrt{I(g)^2 + 2\,\mathrm{Var}(g)}. \quad 0 \le g \le 1. \tag{3.3.7}$$

Мы докажем более сильное утверждение:

Лемма 3.3.1. Для любой измеримой функции $g : M \to [0,1]$

$$I(\mathbf{E}f) - \mathbf{E}I(f) \ \le \ \frac{1}{I(\mathbf{E}f)}\operatorname{Var}(f). \tag{3.3.8}$$

Применяя неравенство Йенсена (гауссовская изопериметрическая функция $I(t) = \varphi(\Phi^{-1}(t))$ вогнута на [0,1]) и (3.3.8), мы получим

$$\begin{aligned}(I(\mathbf{E}g))^2 - (\mathbf{E}I(g))^2 &= (I(\mathbf{E}g) - \mathbf{E}I(g))\,(I(\mathbf{E}g) + \mathbf{E}I(g)) \\ &\le (I(\mathbf{E}g) - \mathbf{E}I(g))\,2I(\mathbf{E}g) \le 2\operatorname{Var}(g).\end{aligned}$$

Следовательно

$$(I(\mathbf{E}g))^2 \le (\mathbf{E}I(g))^2 + 2\operatorname{Var}(g) \le \left(\mathbf{E}\sqrt{I(g)^2 + 2\operatorname{Var}(g)}\,\right)^2,$$

где на последнем шаге мы воспользовались (ранее упомянутым) неравенством $(\mathbf{E}u)^2 + (\mathbf{E}v)^2 \le \left(\mathbf{E}\sqrt{u^2+v^2}\,\right)^2$ для $u = I(g)$ и $v = \sqrt{2\ \operatorname{Var}(g)}$. Таким образом, (3.3.8) влечет (3.3.7).

Доказательство леммы 3.3.1.

Отметим сначала несколько свойств функции $I(t) = \varphi(\Phi^{-1}(t))$, $0 \le t \le 1$:

1) I вогнута на [0,1] и симметрична относительно точки 1/2;
2) I возрастает на [0,1/2] и убывает на [1/2,1]; $I(0) = I(1) = 1$;
3) I удовлетворает дифференциальному уравнению $I''I = -1$;
4) функция $I\big(\frac{1}{2} + t\big)^2 + t^2$ вогнута и четна на $|t| \le 1/2$.

Шаг 1. Сведем (3.3.8) к случаю $0 \le g \le 1/2$. Запишем g в виде $g = \frac{1}{2} + \varepsilon f$, где $0 \le f \le 1/2$ и $|\varepsilon| = 1$. Так как $I(\frac{1}{2} + \varepsilon f) = I(\frac{1}{2} + f)$ и $\operatorname{Var}(g) = \mathbf{E}f^2 - (\mathbf{E}\varepsilon f)^2$, (3.3.8) примет вид

$$I\left(\frac{1}{2} + \mathbf{E}\varepsilon f\right) - \mathbf{E}I\left(\frac{1}{2} + f\right) \le \frac{1}{I\left(\frac{1}{2} + \mathbf{E}\varepsilon f\right)}\left(\mathbf{E}f^2 - (\mathbf{E}\varepsilon f)^2\right),$$

что может быть переписано как

$$\left[I^2\left(\frac{1}{2}+\mathbf{E}\varepsilon f\right)+\left(\mathbf{E}\varepsilon f\right)^2\right]-I\left(\frac{1}{2}+\mathbf{E}\varepsilon f\right)\mathbf{E}I\left(\frac{1}{2}+f\right)\le\mathbf{E}f^2. \tag{3.3.9}$$

В силу свойств 1) и 4), левая часть (3.3.9) представляет собой выпуклую четную функцию переменной $t=\mathbf{E}\varepsilon g$. Следовательно максимальное значение этой части при условии, что g фиксирована, достигается на такой функции ε, для которой значение $|t|$ максимально, то есть, на постоянных функциях $\varepsilon=-1$ и $\varepsilon=1$. В обоих случаях мы получим в (3.3.9) одинаковые неравенства, поэтому можно ограничиться случаем $\varepsilon=-1$. Но тогда $g=\frac{1}{2}-f$ принимает значения на интервале [0,1/2].

Шаг 2. Пусть g принимает значения на интервале [0,1/2]. Зафиксируем $c=\mathbf{E}g$. Не умаляя общности, $0<c\le 1/2$. Запишем для функции I разложение Тейлора в точке c до второго порядка с остаточным членом в интегральной форме:

$$I(g)=I(c)+I'(c)\,(g-c)+\int_0^1 I''(t\,c+(1-t)g\,)\,t\,dt\ \ (g-c)^2. \tag{3.3.10}$$

В силу свойств 2) и 3), I'' возрастает на интервале (0,1/2], поэтому $I''(t\,c+(1-t)g\,)\ge I''(t\,c)$. Используя эту оценку и интегрируя (3.3.10), получаем

$$\mathbf{E}I(g)-I(c)\ge\mathrm{Var}(g)\int_0^1 I''(t\,c)\ t\,dt=-\,\mathrm{Var}(g)\int_0^1\frac{t}{I(t\,c)}\,dt.$$

Наконец, воспользуемся неравенством $I(t\,c)\ge t\,I(c)$, которое выполняется в силу вогнутости I и того факта, что $I(0)=0$. В результате приходим к искомому неравенству.

Лемма 3.3.1 и с ней теоремы 3.3.2 и 3.3.1 доказаны.

§ 3.4. Изопериметрическое неравенство для многомерного распределения Пуассона

В отличие от неравенств (3.2.1)–(3.2.2) для симметричного распределения Бернулли, которое мы связывали с изопериметрическим неравенством для гауссовской меры, неравенства (3.3.2)–(3.3.3) для несимметричного распределения Бернулли содержат в себе как предельный случай соответствующие изопериметрические неравенства для распределения Пуассона.

Обозначим через Π_λ распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$: для $k \in \mathbf{Z}_+ = \{0, 1, 2, \cdots\}$ $\Pi_\lambda(\{k\}) = e^{-\lambda}\lambda^k/k!$. Как обычно, Π_λ^n обозначает соответствующую продакт-меру на $\mathbf{Z}_+^n$.

Для множеств $A \subset \mathbf{Z}_+^n$ определим функцию

$$h_A(x) = card\,\{i \le n : (x \in A,\, x + e_i \notin A) \ \text{или} \ (x \notin A,\, x + e_i \in A)\},$$

где $(e_i)_{1 \le i \le n}$ – канонический базис в $\mathbf{R}^n$. Наконец, определим оператор $\Delta g(x) = g(x+1) - g(x)$, действующий на семействе всех функций g на $\mathbf{Z}_+$.

Теорема 3.4.1. Пусть $I(t) = \varphi(\Phi^{-1}(t))$, $0 \le t \le 1$. Для любой функции $g : \mathbf{Z}_+ \to [0, 1]$

$$I(\mathbf{E}g) \le \mathbf{E}\sqrt{I(g)^2 + 2\lambda\,|\Delta g|^2} \tag{3.4.1}$$

(математические ожидания понимаются в смысле меры Π_λ). Как следствие, для любого множества $A \subset \mathbf{Z}_+^n$

$$\int \sqrt{h_A}\, d\Pi_\lambda^n \ \ge \ \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\ I(\Pi_\lambda^n(A)). \tag{3.4.2}$$

Неравенство (3.4.2) служит "пуассоновским" аналогом изопериметрического неравенства (3.3.2) на дискретном кубе: величина $\int \sqrt{h_A}\, d\Pi_\lambda^n$ представляет собой некоторую поверхностную меру, предельный аналог $\mathbf{P}$-периметра. Как следствие, можно оценить меру множества $\partial A = \{x \in \mathbf{Z}^n : h_A(x) > 0\}$, представляющего собой границу A правостороннего типа. Действительно, в силу того, что $h_A \le n\,1_{\partial A}$, получаем

$$\Pi_\lambda^n(\partial A) \ \ge \ \frac{1}{\sqrt{2\lambda n}}\ I(\Pi_\lambda^n(A)).$$

Что же касается неравенства (3.4.1), то это в некотором смысле весьма неожиданный факт. Если мы располагаем аналогичным неравенством

$$I(\mathbf{E}_\mu g) \le \mathbf{E}_\mu \sqrt{I(g)^2 + c\,|\nabla g|^2}$$

для модуля градиента функций g, определенных на некотором метрическом пространстве M с мерой μ, то все липшицевы функции обязаны иметь распределения с гауссовским убыванием хвостов (наблюдение Д.Бакри и М.Леду [62]). В то же время пуассоновские хвосты $\Pi_\lambda(\{i : i \ge k\})$ "тяжелее" гауссовских (они ведут себя как $\Pi_\lambda(\{k\})$ при $k \to \infty$). Таким образом, дискретные неравенства могут существенно отличаться от "непрерывных".

Доказательство теоремы 3.4.1. Применяя теорему 3.1.2 к операторам $\Gamma_i(g) = |\Delta g|$, можно распространить (3.4.1) на многомерное пространство $(\mathbf{Z}_+^n, \Pi_\lambda^n)$ с оператором

$$\Gamma g(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |g(x + e_i) - g(x)|^2}.$$

При этом на индикаторных функциях многомерный вариант неравенства (3.4.1) будет совпадать с (3.4.2). Таким образом, остается установить (3.4.1). Применим для этого (3.3.3) при $p = \lambda/n$ с достаточно большим n к функциям вида $g_n(x) = g(x_1 + \cdots + x_n)$. В силу теоремы Пуассона, (3.3.3) в пределе превратится в (3.4.1). Теорема доказана.

§ 3.5. Уточнение некоторых неравенств Талаграна на дискретном кубе

Возвратимся к теореме 3.3.1 – изопериметрическим неравенствам на дискретном кубе $(\{0,1\}^n, \mathbf{P})$, $\mathbf{P} = \mu_p^n$, вида

$$\int \sqrt{h_A}\, d\mathbf{P} \geq c_p\, I(\mathbf{P}(A)). \tag{3.5.1}$$

Наилучшая постоянна c_p имеет порядок $\frac{1}{\sqrt{pq}}$ $(q = 1 - p)$, что может быть существенно, например, при переходе к пуассоновскому распределению. Однако, в некоторых задачах необходимо оценивать в терминах объема "$\mathbf{P}(A)$" другую величину – $\int_A \sqrt{h_A}\, d\mathbf{P}$, и это существенно изменит поведение констант.

Здесь нашей целью будут следующие два утверждения.

Теорема 3.5.1. Пусть $I(t) = \varphi(\Phi^{-1}(t))$, $0 \leq t \leq 1$. Для всех $A \subset \{0,1\}^n$

$$\int_A \sqrt{h_A}\, d\mathbf{P} \geq c_p\, I(\mathbf{P}(A)), \tag{3.5.2}$$

где наилучшая постоянная c_p, не зависящая от размерности n, удовлетворяет при всех $0 < p < 1$ и для некоторых абсолютных постоянных $K_0, K_1 \in (0, +\infty)$ неравенствам

$$K_0 \frac{1}{\sqrt{\log(1/pq)}} \leq c_p \leq K_1 \frac{1}{\sqrt{\log(1/pq)}}\,. \tag{3.5.3}$$

Теорема 3.5.2. Пусть $\mathbf{P}$ – продакт-мера на $\{0,1\}^n$ с необязательно одинаковыми маргинальными распределениями. Для всех $A \subset \{0,1\}^n$

$$\int_A \sqrt{h_A}\, d\mathbf{P} \geq \mathbf{P}(A)(1 - \mathbf{P}(A)). \tag{3.5.4}$$

Очевидно, с точностью до множителя, зависящего от p, (3.5.2) сильнее, чем (3.5.1). Такое неравенство было получено Талаграном [216] с худшей по порядку постоянной $c_p = \sqrt{pq}$ (с точностью до абсолютного множителя). С такой же по порядку постоянной (перед $\mathbf{P}(A)(1-\mathbf{P}(A))$) им было доказано и неравенство (3.5.4), однако, в том лишь случае. когда $\mathbf{P} = \mu_p^n$ имеет одинаковые маргинальные распределения. Основным мотивом для получения таких оценок послужила теорема Маргулиса [23]: существует функция $c = c(p,t) > 0$, $p, t \in (0,1)$, такая что для всех множеств $A \subset \{0,1\}^n$ меры $t = \mu_p^n(A) \in (0,1)$

$$\mu_p^n(\partial A) \int_A h_A \, d\mathbf{P} \geq c(p,t),$$

где $\partial A = \{x \in A : s_i(x) \notin A$ для некоторого $i \leq n\}$ обозначает границу A "с внутренней стороны". В силу неравенства Коши–Буняковского, $\mu_p^n(\partial A) \int_A h_A \, d\mathbf{P} \geq \left(\int_A \sqrt{h_A} \, d\mathbf{P} \right)^2$, поэтому, чтобы иметь какие-либо оценки для функции $c(p,t)$ достаточно уметь оценивать $\int_A \sqrt{h_A} \, d\mathbf{P}$ (но, конечно, оценки для $\int \sqrt{h_A} \, d\mathbf{P}$ будут недостаточны). Как следствие (3.5.4) (в отличие от (3.5.3)), мы получаем, что функцию c в теореме Маргулиса можно выбрать не зависящей от p, в частности, можно взять $c(p,t) = (t(1-t))^2$. Однако, при фиксированных p, более точная зависимость c от переменной t дается неравенством (3.5.3).

Как и при доказательстве неравенств вида (3.5.1), мы будем использовать функциональную форму (3.3.3), но с другим оператором Г. Именно, введем оператор

$$(\mathrm{M}\, g)(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left((g(x) - g(s_i(x))^+ \right)^2}, \quad x \in \{0,1\}^n,$$

где g – произвольная функция, определенная на дискретном кубе $\{0,1\}^n$ (мы используем стандартное обозначение $a^+ = \max(a,0)$). Теперь нашей функциональной формой будут неравенства вида

$$c\, I(\mathbf{E} g) \leq \mathbf{E} \sqrt{c\, I(g)^2 + (\mathrm{M}\, g)^2}, \quad 0 \leq g \leq 1. \tag{3.5.5}$$

Очевидно, на индикаторных функциях $g = 1_A$ (3.5.5) превращается соответственно в (3.5.2), когда $c = c_p$ и $I(t) = \varphi(\Phi^{-1}(t))$, и в (3.5.4), когда $c=1$ и $I(t)=t(1-t)$. В силу теоремы 3.1.2, достаточно исследовать одномерное функциональное неравенство.

Начнем с более простой теоремы 3.5.2.

Лемма 3.5.1. Пусть $I(t)=t(1-t)$, $0\le t\le 1$. По отношению к мере μ_p на $\{0,1\}$, оптимальная постоянная $c=c_p$ в неравенстве

$$cI(\mathbf{E}g)\le \mathbf{E}\sqrt{c^2I(g)^2+(\mathrm{M}\,g)^2},\quad 0\le g\le 1. \tag{3.5.6}$$

определяется соотношением

$$c_p=\min\left\{\sqrt{\frac{2-p}{p}},\sqrt{\frac{2-q}{q}}\right\}.$$

Заметим, что $c_p\ge 1$, поэтому многомернй вариант (3.5.6) влечет (3.5.4). Кроме того, для продакт-мер $\mathbf{P}=\mu_p^n$, (3.5.4) может быть незначительно усилено: $\int_A\sqrt{h_A}\,d\mathbf{P}\ge c_p\,\mathbf{P}\,(A)(1-\mathbf{P}\,(A))$.

Доказательство. Положим $d=1/c^2$. Так как $I(\mathbf{E}g)-\mathbf{E}I(g)=\mathrm{Var}(g)$, (3.5.6) можно записать в виде

$$\mathrm{Var}(g)\le \mathbf{E}\left[\sqrt{I(g)^2+d\,(\mathrm{M}\,g)^2}-I(g)\right].$$

Положим $g(1)=a$, $g(0)=b$. Пусть сначала $1\ge a\ge b\ge 0$. Тогда это неравенство запишется как

$$pq(a-b)^2\le p\sqrt{I(a)^2+d(a-b)^2}-pI(a),$$

что в свою очередь (после возведения в квадрат) сводится к неравенству

$$q^2(a-b)^2+2qI(a)\le d. \tag{3.5.7}$$

Максимум левой левой части в (3.5.7) достигается при $b=0$ и $a=1/(2-q)\in[0,1]$, что дает $d\ge\frac{q}{2-q}$. Рассмотрение случая $a\le b$ приводит аналогично к неравенству $d\ge\frac{p}{2-p}$. Таким образом, (3.5.6) выполняется для всех g тогда и только тогда, когда $d \geq 1/c_p^2$. Лемма 3.5.1 и с ней теорема 3.5.2 доказаны.

Перейдем теперь к теореме 3.5.1. Прежде, чем доказывать "гауссовский" вариант (3.5.5), что дает левую оценку в (3.5.3), покажем, почему справедлива правая оценка. Применим (3.5.2) к одноточечному множеству $A = \{S_n = 0\}$ – мы получим неравенство

$$\sqrt{n} q^n \geq c_p \, I(q^n). \tag{3.5.8}$$

Как уже ранее отмечалось, функция $I(t)$ эквивалентна при $t \to 0$ функции $t\sqrt{2\log(1/t)}$, поэтому при больших n (3.5.8) можно записать как

$$\sqrt{n} q^n \geq c_p \, q^n \sqrt{\log \frac{1}{q^n}} \, (1 + o(1)).$$

Устремляя $n \to \infty$, приходим к неравенству $c_p \leq 1/\sqrt{\log(1/q)}$. Аналогично применяя (3.5.2) к одноточечному множеству $A = \{S_n = n\}$, мы получим неравенство $c_p \leq 1/\sqrt{\log(1/p)}$. Обе оценки дают $c_p \leq 1/\sqrt{\log(1/p')}$, где $p' = \min(p, q)$. Но p' имеет порядок pq при $pq \to 0$. Таким образом, правая оценка в (3.5.3) доказана.

Перейдем теперь к левой оценке. Действуя как и при доказательстве леммы 3.5.1, нам нужно установить неравенство

$$I(pa + qb) \leq p\sqrt{I(a^2) + d\,(a - b)^2} + qI(b), \tag{3.5.9}$$

где $p \in (0, 1)$ – фиксировано, $1 \geq a > b \geq 0$ – произвольные числа, и $d \leq K \log(1/(pq))$ с некоторой абсолютной постоянной K (заметим, что (3.5.9) совпадает с (3.5.5), если положить $g(1) = a$, $g(0) = b$ и $d = 1/c^2$). Для доказательства этого факта нам потребуются исследовать некоторые свойства функции I, точнее мы будем работать с другой функцией, а именно,

$$I_0(x) = J(x(1 - x)), \quad \text{где} \quad J(x) = x\sqrt{\log(1/x)}, \; 0 \leq x \leq 1,$$

и будем доказывать (3.5.9) для I_0 вместо I (это возможно, поскольку эти функции можно оценить друг через друга с точностью до абсолютных постоянных).

Итак, зафиксируем $p \in (0,1)$ и введем функцию

$$L \equiv L(a,b) = I_0(pa+qb) - (pI_0(a) + qI_0(b)).$$

Тогда неравенство (3.5.9) (для функции I_0) можно записать в виде

$$\frac{L}{pI_0(a)} \le \sqrt{1+t^2} - 1, \quad \text{где} \quad t = \frac{\sqrt{d}\,(a-b)}{I_0(a)}.$$

Так как $\frac{1}{3}\min(t,t^2) \le \sqrt{1+t^2} - 1 \le \min(t,t^2)$ для всех $t \ge 0$, нам будет достаточно установить два неравенства:

$$3\,\frac{L}{p\,(a-b)} \le \sqrt{d}, \tag{3.5.10}$$

$$3\,\frac{LI_0(a)}{p\,(a-b)^2} \le d, \tag{3.5.11}$$

где $d = K\log(1/(pq))$ (K – абсолютная постоянная).

Лемма 3.5.2. $J(x) \le 1$ для всех $x \in [0,1]$.

Доказательство. Имеем $J(0) = J(1) = 0$. Для $0 < x < 1$

$$J'(x) = \sqrt{\log\frac{1}{x}} - \frac{1}{2\sqrt{\log\frac{1}{x}}} = 0 \tag{3.5.12}$$

тогда и только тогда, когда $x = 1/\sqrt{e}$. Следовательно $J(x) \le J(1/\sqrt{e}) = 1/\sqrt{2e} < 1$.

Лемма 3.5.3.

a) Функция I_0 возрастает на $[0,1/2]$ и убывает на $[1/2,1]$.

b) I_0 вогнута на $[0,1]$.

c) $\frac{1}{3} \le -I_0''(x)I_0(x) \le 1$ для всех $x \in (0.1)$.

Доказательство. Положим $y = x(1-x) \in [0,1/4]$. Так как J возрастает на интервале $[0,1/\sqrt{e}\,]$ и $1/\sqrt{e} \ge 1/4$, имеем $I_0'(x) =$

$J'(y)(1-2x) \geq 0$ для всех $0 < x \leq 1/2$. Это доказывает a), так как I_0 симметрична относительно точки $1/2$. Свойство b) вытекает из c). Чтобы доказать c), воспользуемся (3.5.12):

$$J''(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{\log\dfrac{1}{x}}} - \frac{1}{4x\log\dfrac{1}{x}\sqrt{\log\dfrac{1}{x}}}\ .$$

Следовательно

$$-J''(x)J(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4\log\dfrac{1}{x}}\,, \quad J'(x)J(x) = x\log\frac{1}{x} - \frac{1}{2}x.$$

В силу определения $y = x(1-x)$, имеем $(y')^2 = 1-4y$, $y'' = -2$, поэтому

$$\begin{aligned} -I_0''(x)I_0(x) &= -[J''(y)(1-4y) - 2J'(y)]\ J(y) \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\log\dfrac{1}{y}}\right)(1-4y) + \left(2y\log\frac{1}{y} - y\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4\log\dfrac{1}{y}} - y\left(3 - 2\log\frac{1}{y} + \frac{1}{\log\dfrac{1}{y}}\right). \end{aligned}$$

Таким образом, вводя переменную $t = \log\dfrac{1}{y} \in [\log 4, +\infty)$, полученное тождество можно записать в виде

$$-t\,I_0''(x)I_0(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\,t + e^{-t}\,(2t^2-3t-1).$$

Следовательно $-I_0''(x)I_0(x) \leq 1$ тогда и только тогда, когда

$$u(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\,t + e^{-t}\,(2t^2-3t-1) \leq 0.$$

Рассмотрим функцию $v(t) = e^{-t}\,(2t^2-3t-1)$. Имеем

$$v'(t) = -2e^{-t}\,(2t^2-7t+2) = -2e^{-t}\,(t-t_1)(t-t_2),$$

где $t_1 = \dfrac{7-\sqrt{35}}{4} = 0.271\ldots$, $t_2 = \dfrac{7+\sqrt{35}}{4} = 3.229\ldots$. Поэтому v возрастает на $[t_1, t_2]$ и убывает на $[t_2, +\infty)$. В частности, для всех $t \geq \log 4$ $v(t) \leq v(t_2) = 0,403\ldots$. Поэтому

$$u(t) \leq \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ \log 4 + v(t_2) = -0.041\ldots < 0,$$

и верхняя оценка для $-I_0'' I_0$ в c) доказана. Чтобы доказать нижнюю оценку, заметим что $-I_0''(x)I_0(x) \geq \frac{1}{3}$ тогда и только тогда, когда $w(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\, t + v(t) \geq 0$. Так как $v(+\infty) = 0$ и $v(\log 4) < 0$,

$$v(t) \geq v(\log 4) = 2\,\log^2 2 - \frac{3}{2}\,\log 2 - \frac{1}{4}$$

для всех $t \geq \log 4$. Следовательно

$$w(t) \geq w(\log 4) = 2\,\log^2 2 - \frac{7}{6}\,\log 2 = 0.152\cdots > 0.$$

Лемма 3.5.3 доказана.

Лемма 3.5.4. Для всех $a \in (0,1)$

$$Q_p(a) \equiv \frac{I_0^2(pa) - p^2 I_0^2(a)}{(pa)^2} \leq 3 \log \frac{1}{pq}\,.$$

Доказательство. Записывая $1 - pa = (1-a) + qa$, имеем по определению I_0:

$$\begin{aligned}
&Q_p(a) = (1-pa)^2 \log \frac{1}{pa(1-pa)} - (1-a)^2 \log \frac{1}{a(1-a)} = \\
&\big((1-a)^2 + 2qa(1-a) + a^2\big) \log \frac{1}{pa(1-pa)} - (1-a)^2 \log \frac{1}{a(1-a)} = \\
&(1-pa)^2 \log \frac{1}{p} + (1-a)^2 \log \frac{1-a}{1-pa} + \big(2qa(1-a) + a^2\big) \log \frac{1}{a(1-pa)}\,.
\end{aligned} \tag{3.5.13}$$

Первое слагаемое в (3.5.13) можно оценить выражением $\log \frac{1}{p}$, второе – отрицательно, так как $1 - a < 1 - pa$. Используя неравенства $1 - pa \geq q$, $2qa(1-a) + a^2 \leq 2a$, оценим третье слагаемое выражениями:

$$2a \log \frac{1}{qa} \leq 2 \max\big(1, \log \frac{1}{q}\big) \leq 2 \log \frac{1}{pq}$$

(на последнем шаге использовали неравенство $1 < \log \frac{1}{pq}$). Собирая все оценки, получаем

$$Q_p(a) \leq \log \frac{1}{p} + 2 \log \frac{1}{pq} \leq 3 \log \frac{1}{pq}\,.$$

Лемма 3.5.5. Для всех $a \in (0,1]$,

$$R_p(a) \equiv \frac{I_0(pa) - pI_0(a)}{a} \le 4pq\sqrt{\log\frac{1}{pq}}.$$

Доказательство. Записывая $1 - pa = (1-a) + qa$, имеем

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p}\,R_p(a) &= (1-pa)\sqrt{\log\frac{1}{pa(1-pa)}} - (1-a)\sqrt{\log\frac{1}{a(1-a)}} \\
&= (1-a)\left[\sqrt{\log\frac{1}{pa(1-pa)}} - \sqrt{\log\frac{1}{a(1-a)}}\,\right] + qa\sqrt{\log\frac{1}{pa(1-pa)}} \\
&= (1-a)\,\frac{\log\dfrac{1-a}{p(1-pa)}}{\sqrt{\log\dfrac{1}{pa(1-pa)}} + \sqrt{\log\dfrac{1}{a(1-a)}}} + qa\sqrt{\log\frac{1}{pa(1-pa)}}.
\end{aligned} \tag{3.5.14}$$

Чтобы оценить второе слагаемое в (3.5.14), воспользуемся неравенствами $1 - pa \ge q,\ J(a) \le 1 \le \sqrt{\log\frac{1}{pq}}$:

$$\begin{aligned}
qa\sqrt{\log\frac{1}{pa(1-pa)}} &\le qa\left[\sqrt{\log\frac{1}{pq}} + \sqrt{\log\frac{1}{a}}\right] \\
&\le q\sqrt{\log\frac{1}{pq}} + qJ(a) \le 2q\sqrt{\log\frac{1}{pq}}.
\end{aligned} \tag{3.5.15}$$

Первое слагаемое в (3.5.14) неположительно, если $a \ge \frac{1}{1+p}$, так как в этом случае $\frac{1}{pa(1-pa)} \le 1$. Поэтому рассмотрим случай $a \le \frac{1}{1+p}$. Поскольку $\frac{1-a}{1-pa} \le 1$, первое слагаемое можно оценить выражениями

$$(1-a)\,\frac{\log\dfrac{1}{p}}{\sqrt{\log\dfrac{1}{p}}} \le \sqrt{\log\frac{1}{pq}} \le 2q\sqrt{\log\frac{1}{pq}},$$

причем последнее неравенство выполняется при $q \ge 1/2$. Таким образом, с учетом (3.5.15), в этом случае мы получаем желаемую оценку $\frac{1}{p}\,R_p(a) \le 4q\sqrt{\log\frac{1}{pq}}$.

Пусть теперь $q \leq 1/2$. Оценим первое слагаемое в (3.5.14) другим способом. Снова можно допустить, что $a \leq \dfrac{1}{1+p}$, когда это слагаемое неположительно. Имеем:

$$(1-a)\ \frac{\log\dfrac{1-a}{p(1-pa)}}{\sqrt{\log\dfrac{1}{pa(1-pa)}}+\sqrt{\log\dfrac{1}{a(1-a)}}}\ \leq\ \log\frac{1-a}{p(1-pa)}\,,$$

так как в знаменателе слева $a(1-a) \leq 1/4$ и $pa(1-pa) \leq 1/4$. Оценивая далее, имеем

$$\frac{1-a}{p(1-pa)}\ = 1+q\ \frac{1-(1+p)\,a}{p(1-pa)}\ \leq 1+2q,$$

поскольку $p \geq 1/2$ и $1-(1+p)\,a \leq 1-pa$. Следовательно,

$$\log\frac{1-a}{p(1-pa)}\ \leq \log(1+2q) \leq 2q \leq 2q\sqrt{\log\frac{1}{pq}}\,.$$

С учетом (3.5.15), снова приходим к требуемому заключению. Лемма доказана.

Лемма 3.5.6. Если $1 > a > b \geq 0$, то

$$\frac{L(a,b)}{(a-b)^2} \leq\ \frac{pq}{2I_0(a)}+3\ \frac{L(a,0)}{a^2}\,.$$

Доказательство. Запишем разложение Тейлора для функции I_0 в точке $c \in (0,1)$ по степеням $x-c$, $x \in [0,1]$, с остаточным членом в интегральной форме:

$$I_0(x) = I_0(c) + I_0'(c)\,(x-c) + \int_0^1 I_0''(tc+(1-t)x)\,t\,dt\ \ (x-c)^2.$$

Применяя это разложение к $c = pa+qb$ в точках $x=a$ и $x=b$ и складывая два разложения с весами p и q, получаем (общее) тождество:

$$\frac{L(a,b)}{(a-b)^2}\ = -pq\left[\,q\int_0^1 I_0''(tc+(1-t)a)\,t\,dt + p\int_0^1 I_0''(tc+(1-t)b)\,t\,dt\right]. \tag{3.5.16}$$

В силу леммы 3.5.3 c), $-I_0'' \le 1/I_0$, следовательно

$$\frac{L(a,b)}{(a-b)^2} \le pq\left[q\int_0^1 \frac{1}{I_0(tc+(1-t)a)}\,t\,dt + p\int_0^1 \frac{1}{I_0(tc+(1-t)b)}\,t\,dt\right]. \tag{3.5.17}$$

В силу леммы 3.5.3 a), функция $1/I_0$ убывает на [0,1/2] и возрастает на [1/2,1]. Поэтому максимум этой функции на любом интервале $[\alpha,\beta]$ достигается в одной из концевых точек интервала. В частности, для всех $x \in [\alpha,\beta]$,

$$\frac{1}{I_0(x)} \le \frac{1}{I_0(\alpha)} + \frac{1}{I_0(\beta)}. \tag{3.5.18}$$

Будем считать, что t и a в (3.5.16)–(3.5.17) фиксированы, а b меняется на интервале $[0,a]$. Тогда $x = tc+(1-t)a$ меняется на интервале $[\alpha,\beta] = [tpa+(1-t)a, a]$, и согласно (3.5.18)

$$\frac{1}{I_0(tc+(1-t)a)} \le \frac{1}{I_0(a)} + \frac{1}{I_0(tpa+(1-t)a)}.$$

Аналогично $\frac{1}{I_0(tc+(1-t)b)} \le \frac{1}{I_0(a)} + \frac{1}{I_0(tpa)}$. Используя эти оценки в (3.5.17), получаем

$$\frac{L(a,b)}{(a-b)^2} \le \frac{pq}{2I_0(a)} + pq\left[q\int_0^1 \frac{1}{I_0(tpa+(1-t)a)}\,t\,dt + p\int_0^1 \frac{1}{I_0(tpa)}\,t\,dt\right].$$

Применяя неравенство $1/I_0 \le -3I_0''$ (лемма 3.5.3 c)), получаем

$$\frac{L(a,b)}{(a-b)^2} \le \frac{pq}{2I_0(a)} - 3\,pq\left[q\int_0^1 I_0''(tpa+(1-t)a)\,t\,dt + p\int_0^1 I_0''(tpa)\,t\,dt\right].$$

Но второе слагаемое (без множителя 3) совпадает с правой частью (3.5.16) при $b=0$ и поэтому равно $L(a,0)/a^2$. Таким образом, Лемма 3.5.6 доказана.

Доказательство теоремы 3.5.1.

Нужно доказать (3.5.10)–(3.5.11). Начнем с (3.5.11). В силу леммы 3.5.6,

$$3\,\frac{LI_0(a)}{p(a-b)^2} \le \frac{3q}{2} + 9\,\frac{L(a,0)I_0(a)}{pa^2}. \tag{3.5.19}$$

Функция I_0 вогнута (лемма 3.5.3а)) и $I_0(0) = 0$. Следовательно $I_0(pa) \geq pI_0(a)$. Поэтому

$$L(a,0) = I_0(pa) - pI_0(a) = \frac{I_0^2(pa) - p^2 I_0^2(a)}{I_0(pa) + pI_0(a)} \\ \leq \frac{I_0^2(pa) - p^2 I_0^2(a)}{2pI_0(a)} = \frac{(pa)^2 Q_p(a)}{2pI_0(a)}$$

($Q_p(a)$ определено в лемме 3.5.4). Применяя эту лемму, приходим к неравенству $\dfrac{L(a,0)I_0(a)}{pa^2} \leq \dfrac{3}{2}\log\dfrac{1}{pq}$, и с учетом (3.5.19), имеем

$$3\,\frac{LI_0(a)}{p(a-b)^2} \leq \frac{3q}{2} + \frac{27}{2}\log\frac{1}{pq} \leq 15\log\frac{1}{pq}\,,$$

так как $\dfrac{3}{2} \leq \dfrac{3}{2}\log\dfrac{1}{pq}$. Таким образом, (3.5.11) выполняется с $d = 15\log\dfrac{1}{pq}$.

Чтобы установить (3.5.10), рассмотрим при $1 \geq a \geq b \geq 0$ неравенство вида

$$L(a,b) = I_0(pa+qb) - (pI_0(a) + qI_0(b)) \leq C(p)\,(a-b). \qquad (3.5.20)$$

Так как I_0 вогнута, для всех $c \in (0,1)$ левая часть (3.5.20) представляет собой вогнутую функцию пары (a,b) на сегменте

$$\Delta(c) = \{(a,b) : pa+qb = c, 1 \geq a \geq b \geq 0\},$$

в то время как правая часть (3.5.20) – линейная функция. Поэтому (3.5.20) выполняется для всех $(a,b) \in \Delta(c)$ тогда и только тогда, когда это неравенство справедливо для концевых точек этого интервала. Очевидно, для концевых точек $\Delta(c)$ с координатами (a,b) либо $b = 0$, либо $a = 1$. Если $b = 0$, то (3.5.20) превращается в неравенство

$$I_0(pa) - pI_0(a) \leq C_0(p)\,a, \qquad (3.5.21)$$

где $C_0(p) = C(p)$. Если же $a = 1$, то (3.5.20) превращается после формальной замены переменной b на a в неравенство

$$I_0(qa) - qI_0(a) \leq C_0(q)\,a,$$

где $C_0(q) = C(p)$. Следовательно оптимальные постоянные $C(p)$ в (3.5.20) связаны с оптимальными постоянными $C_0(p)$ в (3.5.21) тождеством

$$C(p) = \min(C_0(p), C_0(q)).$$

В силу леммы 3.5.4, $C_0(p) \leq 4pq\sqrt{\log(1/pq)}$. Следовательно

$$C(p) \leq 4pq\sqrt{\log(1/pq)}.$$

Как результат, $3\frac{L}{p(a-b)} \leq 12\sqrt{\log(1/pq)}$, и значит (3.5.10) выполняется с $d = 144\log(1/pq)$.

Теорема 3.5.1 доказана.

§ 3.6. Изопериметрические неравенства для решетчатых распределений

Здесь мы распространим теорему 3.5.2 для продакт-мер $\mathbf{P} = \mu^n$ с одинаковыми маргинальными распределениями μ, сосредоточенными на множестве целых чисел $\mathbf{Z}$. Нашей задачей будет описать в терминах порождающих мер μ все продакт-меры, которые удовлетвотяют с точностью до постоянной, не зависящей от размерности, изопериметрическим неравенствам типа (3.5.4). Важную роль в нашем описании будет играть двустороннее показательное распределение ν.

По аналогии с дискретным кубом, с каждым множеством $A \subset \mathbf{Z}^n$ свяжем функцию

$$h_A(x) = card\{i \le n : x \in A,\, (x + e_i \notin A \text{ или } x - e_i \notin A)\},$$

где $(e_i)_{i \le n}$ – канонический базис в $\mathbf{R}^n$ (на дискретном кубе этой функции соответствует функция $h_A 1_A$ – мы упрощаем обозначения с тем, чтобы интеграл в (3.5.4) формально рассматривать по всему пространству). Определим $\partial A = \{h_A > 0\}$ – "дискретную" границу A "с внутренней стороны".

Для функций g на $\mathbf{Z}^n$ соответствующее определение функции $\mathrm{M}\, g$ должно быть

$$\mathrm{M}\, g(x) = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} ((g(x) - g(x - e_i))^+)^2 + ((g(x) - g(x + e_i))^+)^2}.$$

Напомним, что $\Delta g(x) = g(x+1) - g(x)$, $x \in \mathbf{Z}$, – разностный оператор, действующий на семействе всех функций на $\mathbf{Z}$.

Для вероятностной меры μ на прямой $\mathbf{R}$ с функцией распределения $F_\mu(x) = \mu((-\infty, x])$, $x \in \mathbf{R}$, определим функцию

$$F_\mu^{-1}(p) = \inf\{x : F_\mu(x) \ge p\}, \quad p \in (0, 1],$$

принимающую значения в $(-\infty, +\infty]$. Напомним, что двустороннее показательное распределение, которое мы обозначаем через ν имеет плотность $\frac{1}{2}\exp(-|x|)$ (по отношению к мере Лебега). Отображение $U_\mu : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $U_\mu(x) = F_\mu^{-1}(F_\nu(x))$, непрерывно слева, не убывает и переводит ν в μ (отображение с такими свойствами единственно). Если μ сосредоточена на $\mathbf{Z}$, то U_μ – ступенчатая функция со значениями в $\mathbf{Z}$.

Теорема 3.6.1. Пусть μ – вероятностная мера на $\mathbf{Z}$. Следующие условия эквивалентны:

a) существует $c > 0$, такое что для всех $n \geq 1$ и $A \subset \mathbf{Z}^n$

$$\int \sqrt{h_A}\, d\mu^n \geq c\, \mu^n(A)\,(1 - \mu^n(A)); \tag{3.6.1}$$

b) существует $c > 0$, такое что для всех $A \subset \mathbf{Z}$

$$\mu(\partial A) \geq c\, \mu(A)\,(1 - \mu(A)); \tag{3.6.2}$$

c) мера μ удовлетворяет неравенству типа Пуанкаре для оператора M: существует $c > 0$, такое что для всех функций g на $\mathbf{Z}$

$$c\, \mathrm{Var}_\mu(g) \leq \mathbf{E}_\mu(\mathrm{M}\, g)^2; \tag{3.6.3}$$

d) мера μ удовлетворяет неравенству типа Пуанкаре для оператора Δ: существует $c > 0$, такое что для всех функций g на $\mathbf{Z}$

$$c\, \mathrm{Var}_\mu(g) \leq \mathbf{E}_\mu|\Delta g|^2; \tag{3.6.4}$$

e) существует $c > 0$, такое что для всех $a \in \mathbf{Z}$

$$c\, F_\mu(a)(1 - F_\mu(a)) \leq \mu(\{a\}); \tag{3.6.5}$$

f) для некоторого $h > 0$

$$\sup_{x \in \mathbf{R}}\, [U_\mu(x + h) - U_\mu(x)] \leq 1. \tag{3.6.6}$$

Заметим, что каждое из свойств $a) - f)$ влечет тот факт, что носителем μ будет некоторый целочисленный интервал (конечный или нет). Действительно, если допустить противное, то есть, если $\mu((-\infty, a-1]) > 0$ и $\mu([a+1, +\infty)) > 0$, но $\mu(\{a\}) = 0$ для некоторого $a \in \mathbf{Z}$, то неравенства (3.6.2) и (3.6.5) нарушаются для $A = (-\infty, a] \cap \mathbf{Z}$, а (3.6.3)–(3.6.4) – для индикаторной функции $g = 1_{(-\infty,a]\cap\mathbf{Z}}$ (так как $\mathrm{M}\, g = \Delta g = 0$ μ-п.н.). Наконец, как следствие (3.6.5), образ $U_\mu(\mathbf{R})$ должен быть интервалом в $\mathbf{Z}$. Заметим, что свойство $a)$ совпадает с $b)$ при $n = 1$.

Неравенства типа Пуанкаре, в частности, (3.6.4)–(3.6.5) легко распространяются на многомерное пространство $\mathbf{Z}^n$, но на индикаторных функциях они будут слабее, чем изопериметрические неравенства типа (3.6.1). Как и ранее, нам следует избрать другую функциональную форму для (3.6.1) и доказывать неравенства вида

$$c\, I(\mathbf{E}_\mu g) \leq \mathbf{E}_\mu \sqrt{c^2 I(g)^2 + (\mathrm{M}\, g)^2}, \quad 0 \leq g \leq 1, \tag{3.6.7}$$

с функцией $I(t) = t(1-t)$, как в лемме 3.5.1. Неравенство (3.6.7) (снова в силу общей теоремы 3.1.2) обобщается на многомерный случай, и на индикаторных функциях многомерный вариант этого неравенства дает уже (3.6.1). Таким образом, чтобы свести теорему 3.6.1 к одномерному случаю, следует объяснить, почему (3.6.3) эквивалентно (3.6.7). Если бы речь шла о сравнении "непрерывных" аналогов (3.6.3) и (3.6.7) для обычной производной g, то (3.6.7) было бы сильнее, чем (3.6.3). Однако, для градиентов дискретного типа ситуация меняется существенно, и решающее наблюдение состоит в том, что при $n = 1$ $\mathrm{M}\, g \leq 1$, как только $0 \leq g \leq 1$. Как следствие, если (3.6.3) выполняется с постоянной c, то (3.6.7) выполняется с постоянной $c_1 = 1/\sqrt{\frac{1}{2c} + \frac{1}{c^2}}$. Действительно, для любых $u \in [0, 1/4]$ и $v \in [0, 1]$ справедливо

$$\sqrt{u^2 + dv^2} - u \geq \frac{1}{c} v^2, \quad \text{где} \quad d = 1/c_1^2.$$

Применяя это неравенство к $u = I(g)$, $v = \mathrm{M}\, g$, получаем

$$\mathbf{E}_\mu \left[\sqrt{I(g)^2 + d\,(\mathrm{M}\, g)^2} - I(g) \right] \geq \frac{1}{c}\, \mathbf{E}_\mu (\mathrm{M}\, g)^2 \geq \mathrm{Var}_\mu(g)$$
$$= I(\mathbf{E}_\mu g) - \mathbf{E}_\mu I(g),$$

т.е., (3.6.7) для c_1. Обратно, применяя (3.6.7) к функциям вида $\frac{1}{2} + \varepsilon g$, где g ограниченная функция на $\mathbf{Z}$, такая что $\mathbf{E}_\mu g = 0$, и устремляя $\varepsilon \to 0$, приходим к (3.6.3) с постоянной $2c$.

Итак, можно считать, что $n = 1$, и как мы отметили, свойство c) влечет (3.6.7), следовательно a) и b), следовательно e) ((3.6.2) на множествах $A = (-\infty, a] \cap \mathbf{Z}$ превращается в (3.6.5)). Значит, остается доказать эквивалентность свойств c) – f). Свойства c) и d) очевидным образом влекут e): нужно применить (3.6.3) и (3.6.4) к индикаторным функциям $g = 1_{(-\infty,a] \cap \mathbf{Z}}$. Таким образом, нужно установить лишь две импликации $e) \Rightarrow f) \Rightarrow c)\,\&\, d)$.

Начнем с некоторых приготовлений.

Лемма 3.6.1. Если $x \leq z \leq y$, то

$$\frac{F_\nu(y) - F_\nu(x)}{F_\nu(z)\,(1 - F_\nu(z))} \leq 2\left(e^{y-x} - 1\right).$$

Доказательство. Очевидно, достаточно рассмотреть случаи $z = x$ и $z = y$. Оба эти случая эквивалентны, так как мера ν симметрична относительно 0, и можно считать, что $z = x$. Напомним, что $F_\nu(u) = \frac{1}{2}\, e^u$ при $u \leq 0$ и $F_\nu(u) = 1 - \frac{1}{2}\, e^{-u}$ при $u \geq 0$. Положим $h = y - x$. Если $0 \leq x \leq y$, то

$$\frac{F_\nu(y) - F_\nu(x)}{F_\nu(x)\,(1 - F_\nu(x))} = \frac{1 - e^{-h}}{F_\nu(x)} \leq 2(1 - e^{-h}) \leq 2(e^h - 1).$$

Если $x \leq y \leq 0$, то

$$\frac{F_\nu(y) - F_\nu(x)}{F_\nu(x)\,(1 - F_\nu(x))} = \frac{e^h - 1}{1 - F_\nu(x)} \leq 2(e^h - 1).$$

Наконец, если $x \leq 0 \leq y$, то

$$\frac{F_\nu(y) - F_\nu(x)}{F_\nu(x)\,(1 - F_\nu(x))} = \frac{2e^{-x} - e^{-2x-h} - 1}{1 - F_\nu(x)} \leq 2(2e^{-x} - e^{-2x-h} - 1) \leq 2(e^h - 1),$$

так как последнее неравенство сводится к $2 \le e^{x+h} + e^{-(x+h)}$.

Теперь мы покажем, что свойство $e)$ влечет свойство $f)$. Для приложений к более общим неравенствам, докажем на самом деле более общее утверждение (ниже импликации $e) \Rightarrow f)$ соответствует параметр $h_0 = 1$: в этом случае (3.6.8) превращается в (3.6.5)).

Лемма 3.6.2. Пусть μ – вероятностная мера на прямой $\mathbf{R}$. Пусть $c > 0$ и $h_0 > 0$ таковы, что для всех $a \in \mathbf{R}$

$$F_\mu(a) - F_\mu(a - h_0) \ge c\, F_\mu(a)\,(1 - F_\mu(a)). \tag{3.6.8}$$

Тогда, $\sup_{x\in\mathbf{R}}\,[U_\mu(x+h) - U_\mu(x)] \le h_0$ при $h = \log(1 + c/2)$.

Доказательство. Определим функцию $U_\mu^{-1} : \mathbf{R} \to [-\infty, +\infty]$, исходя из тождества

$$\{t : U_\mu(t) \le a\} = (-\infty, U_\mu^{-1}(a)], \quad a \in \mathbf{R},$$

или явно $U_\mu^{-1}(a) = F_\nu^{-1}(F_\mu(a))$ (что равносильно в силу непрерывности U_μ слева). Отсюда $F_\mu(a) = F_\nu(U_\mu^{-1}(a))$ для всех $a \in \mathbf{R}$. В частности, при $x = U_\mu^{-1}(a - h_0)$, $z = y = U_\mu^{-1}(a)$, (3.6.8) примет вид

$$F_\nu(y) - F_\nu(x) \ge c\, F_\nu(z)\,(1 - F_\nu(z)).$$

В силу леммы 3.6.1, $c \le 2\,(e^{y-x} - 1)$ при условии, что x и y конечны. В любом случае $y \ge x + \log\left(1 + \frac{c}{2}\right)$, то есть,

$$U_\mu^{-1}(a) \ge U_\mu^{-1}(a - h_0) + \log\left(1 + \frac{c}{2}\right) \tag{3.6.9}$$

для всех $a \in \mathbf{R}$. Так как, по определению U_μ^{-1},

$$(-\infty, x] \subset \{t : U_\mu(t) \le U_\mu(x)\} = (-\infty, U_\mu^{-1}(U_\mu(x))],$$

справедливо неравенство $U_\mu^{-1}(U_\mu(x)) \ge x$, $x \in \mathbf{R}$. Поэтому, подставляя в (3.6.9) $a = U_\mu(x) + h_0$, получаем при $h = \log(1 + \frac{c}{2})$:

$$U_\mu^{-1}(U_\mu(x) + h_0) \ge U_\mu^{-1}(U_\mu(x)) + h \ge x + h.$$

Снова в силу определения U_μ^{-1}, имеем $U_\mu(U_\mu^{-1}(a)) \le a$ для всех $a \in \mathbf{R}$, где, если необходимо, следует понимать значения $U_\mu(-\infty)$ и $U_\mu(+\infty)$ в обычном (предельном) смысле. Таким образом,

$$U_\mu(x+h) \le U_\mu(U_\mu^{-1}(U_\mu(x)+h_0)) \le U_\mu(x)+h_0,$$

и следовательно $\sup_{x\in\mathbf{R}}\left[U_\mu(x+h)-U_\mu(x)\right] \le h_0$. Это доказывает лемму 3.6.2.

Чтобы приступить ко второй части $f) \Rightarrow c)\,\&\,d)$, нам потребуются некоторые свойства меры ν.

Лемма 3.6.3. Для любой неотрицательной измеримой функции g на $\mathbf{R}$ и всех $h \in \mathbf{R}$

$$e^{-|h|}\,\mathbf{E}_\nu g(x) \le \mathbf{E}_\nu g(x+h) \le e^{|h|}\,\mathbf{E}_\nu g(x), \tag{3.6.10}$$

$$e^{-2|h|}\,\mathrm{Var}_\nu\, g(x) \le \mathrm{Var}_\nu\, g(x+h) \le e^{2|h|}\,\mathrm{Var}_\nu\, g(x). \tag{3.6.11}$$

Доказательство. Плотность f_ν меры ν удовлетворяет неравенству $f_\nu(x+h)/f_\nu(x) \le e^{|h|}$.

Лемма 3.6.4. Для всех $a \in \mathbf{R}$ и $h > 0$ существует $c = c(a,h) > 0$, такое что для любой неубывающей функции g на $\mathbf{R}$ с $g(a)=0$

$$c\,\mathbf{E}_\nu g(x)^2 \le \mathbf{E}_\nu\big[(g(x)-g(x-h))^2 1_{\{x>a\}} + (g(x+h)-g(x))^2 1_{\{x\le a-h\}}\big].$$

Доказательство. В силу (3.6.10), $c(a,h) \le e^{-2|a|}c(0,h)$, так что достаточно рассмотреть случай $a=0$. Сначала покажем, что для любой неубывающей функции g на $\mathbf{R}$, такой что $g \equiv 0$ на $(-\infty,0]$,

$$\mathbf{E}_\nu g(x+h) \ge (2-e^{-h})\,\mathbf{E}_\nu g(x). \tag{3.6.12}$$

Это неравенство линейно по g, поэтому достаточно его проверить на индикаторных функциях $g = 1_{(a,+\infty)}$, $a \ge 0$ (так как любая неубывающая, непрерывная слева функция, исчезающая на $(-\infty,0]$, может быть представлена в виде смеси таких индикаторов). Для $g = 1_{(a,+\infty)}$ (3.6.12) принимает вид

$$1 - F_\nu(a-h) \geq (2 - e^{-h})\,(1 - F_\nu(a)), \quad a, h \geq 0.$$

Если $a \geq h \geq 0$, это просто $e^h + e^{-h} \geq 2$. Если же $0 \leq a \leq h$, оно запишется как

$$1 - \frac{1}{2}\,e^{a-h} \geq \frac{1}{2}\,(2 - e^{-h})\,e^{-a},$$

что тоже очевидно (с равенством при $a = 0$).

Запишем теперь (3.6.12) в виде

$$(1 - e^{-h})\,\mathbf{E}_\nu g(x) \leq \mathbf{E}_\nu(g(x+h) - g(x)). \tag{3.6.13}$$

Поскольку $g \equiv 0$ на $(-\infty, 0]$, (3.6.13) можно также применить к g^2: в силу неравенства Коши-Буняковского и (3.6.10),

$$\begin{aligned}(1 - e^{-h})\,\|g\|_2^2 &= (1 - e^{-h})\,\mathbf{E}_\nu g(x)^2 \\ &\leq \mathbf{E}_\nu(g(x+h) - g(x))\,(g(x+h) + g(x)) \\ &\leq \|g(x+h) - g(x)\|_2\,\|g(x+h) + g(x)\|_2 \\ &\leq \|g(x+h) - g(x)\|_2 \left(e^{h/2}\|g\|_2 + \|g\|_2\right),\end{aligned}$$

где $\|\cdot\|_2$ обозначает норму в $L^2(\nu)$. Следовательно

$$\left(\frac{1 - e^{-h}}{1 + e^{h/2}}\right)^2 \mathbf{E}_\nu g(x)^2 \leq \mathbf{E}_\nu(g(x+h) - g(x))^2.$$

Снова в силу (3.6.10), и так как $g(x) - g(x-h) = 0$ при $x \leq 0$, имеем

$$c(h)\,\mathbf{E}_\nu g(x)^2 \leq \mathbf{E}_\nu(g(x) - g(x-h))^2 1_{\{x>0\}}, \tag{3.6.14}$$

где $c(h) = e^{-h}\big(\frac{1 - e^{-h}}{1 + e^{h/2}}\big)^2$. Итак, (3.6.14) справедливо для любой неубывающей функции g на $\mathbf{R}$, такой что $g \equiv 0$ на $(-\infty, 0]$. В силу симметричности ν, для любой неубывающей функции g на $\mathbf{R}$, такой что $g \equiv 0$ на $[0, +\infty)$, имеем

$$c(h)\, \mathbf{E}_\nu g(x)^2 \le \mathbf{E}_\nu (g(x+h) - g(x))^2 1_{\{x<0\}}. \tag{3.6.15}$$

Рассмотрим теперь произвольную неубывающую функцию g на $\mathbf{R}$ с условием $g(0) = 0$. Введем функции $g_0 = g\, 1_{(-\infty,0]}$, $g_1 = g\, 1_{[0,+\infty)}$. Применяя (3.6.14) к g_1, а (3.6.15) к g_0, складывая эти неравенства и замечая, что для всех $x \in \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} g_1(x+h) - g_1(x) &\le g(x+h) - g(x), \\ g_0(x) - g_0(x-h) &\le g(x) - g(x-h), \end{aligned}$$

получаем

$$c(h)\, \mathbf{E}_\nu g(x)^2 \le \mathbf{E}_\nu (g(x) - g(x-h))^2 1_{\{x>0\}} + \mathbf{E}_\nu (g(x+h) - g(x))^2 1_{\{x<0\}}.$$

Снова в силу (3.6.10),

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\nu (g(x+h) - g(x))^2 1_{\{-h<x<0\}} &\le e^h\, \mathbf{E}_\nu (g(x) - g(x-h))^2 1_{\{0<x<h\}} \\ &\le e^h\, \mathbf{E}_\nu (g(x) - g(x-h))^2 1_{\{x>0\}}, \end{aligned}$$

следовательно

$$\begin{aligned} c(h)\, \mathbf{E}_\nu g(x)^2 \le (1 + e^h)\, &\mathbf{E}_\nu (g(x) - g(x-h))^2 1_{\{x>0\}} \\ &+ \ \mathbf{E}_\nu (g(x+h) - g(x))^2 1_{\{x \le -h\}}. \end{aligned}$$

Приходим к требуемому утверждению с $c(0,h) = c(h)/(1 + e^h)$. Лемма 3.6.4 доказана.

Лемма 3.6.5. Для любых вещественных $a > b$ существует постоянная $c = c(a,b) > 0$, такая что для любой неубывающей функции g на $\mathbf{R}$

$$c\, \mathrm{Var}_\nu(g(x)) \le \mathbf{E}_\nu (g(x+a) - g(x+b))^2.$$

Доказательство. В силу (3.6.11) достаточно рассмотреть случай $a = h > 0$, $b = -h$, предполагая при этом, что $g(0) = 0$. Мы получим требуемое утверждение, если применим лемму 3.5.4 при $a = 0$ и заметим, что $g(x) - g(x-h) \leq g(x+h) - g(x-h)$, $g(x+h) - g(x) \leq g(x+h) - g(x-h)$.

Теперь мы можем сделать последний шаг для доказательства теоремы 3.6.1.

Лемма 3.6.6. Свойство f) влечет c) и d).

Доказательство. Пусть $h > 0$ такое, что $U_\mu(x+h) \leq U_\mu(x) + 1$ при всех $x \in \mathbf{R}$. Пусть g – неубывающая функция на $\mathbf{Z}$. Применяя лемму 3.6.5 при $a = h$ и $b = 0$ к функции $g(U_\mu)$, получаем

$$\begin{aligned} c\ \mathrm{Var}_\mu(g(y)) &= c\ \mathrm{Var}_\nu(g(U_\mu(x))) \\ &\leq \mathbf{E}_\nu(g(U_\mu(x+h)) - g(U_\mu(x)))^2 \\ &\leq \mathbf{E}_\nu(g(U_\mu(x)+1) - g(U_\mu(x)))^2 \\ &= \mathbf{E}_\mu(g(y+1) - g(y))^2, \end{aligned}$$

то есть, $c\ \mathrm{Var}_\mu(g) \leq \mathbf{E}_\mu|\Delta g|^2$, и (3.6.4) таким образом доказано в предположении монотонности g.

В дальнейшем можно предполагать, что мера μ не сосредоточена в одной точке. Пусть для определенности $p = \mu(\{0\}) > 0$ и $p_1 = \mu(\{1\}) > 0$. Тогда, при (дополнительном к монотонности) условии $g(0) = 0$ по неравенству Коши-Буняковского

$$(\mathbf{E}_\mu g)^2 = (\mathbf{E}_\mu g\, 1_{\{x \neq 0\}})^2 \leq (1-p)\, \mathbf{E}_\mu g^2.$$

Следовательно $\mathrm{Var}_\mu(g) \geq p\, \mathbf{E}_\mu g^2$. Как следствие, для монотонных g, таких что $g(0) = 0$, имеем

$$cp\, \mathbf{E}_\mu g(y)^2 \leq \mathbf{E}_\mu |\Delta g(y)|^2. \tag{3.6.16}$$

На самом деле, чтобы двигаться дальше и доказывать (3.6.16) для оператора M, нам понадобится при тех же условиях еще одно неравенство. Пусть $a \in \mathbf{R}$ – максимальный корень уравнения $U_\mu(a) = 0$ (такое значение a существует, так как функция U_μ непрерывна слева и $\mu([1,+\infty)) > 0$). Тогда для всех $x > a$ имеем $y = U_\mu(x) \geq 1$, в то время как для $x \leq a - h$ имеем $y = U_\mu(x) \leq 0$. Применяя лемму 3.6.4 при этих значениях a и h к функции $g(U_\mu)$ и замечая, что $g(U_\mu(a)) = g(0) = 0$ (так что все условия леммы выполнены), получаем с помощью тех же самых рассуждений неравенство

$$c\,\mathbf{E}_\mu g(y)^2 \leq \mathbf{E}_\mu|\Delta g(y-1)|^2 1_{\{y\geq 1\}} + \mathbf{E}_\mu|\Delta g(y)|^2 1_{\{y\leq 0\}}, \qquad (3.6.17)$$

где $c = c(a,h)$ – постоянная из леммы 3.6.4. Второе математическое ожидание справа содержит слагаемое $|\Delta g(0)|^2 p$, что может быть оценено сверху выражением $\frac{p}{p_1}\,\mathbf{E}_\mu|\Delta g(y-1)|^2 1_{\{y\geq 1\}}$. Таким образом, получаем с учетом (3.6.17), что

$$c_1\,\mathbf{E}_\mu g(y)^2 \leq \mathbf{E}_\mu|\Delta g(y-1)|^2 1_{\{y\geq 1\}} + \mathbf{E}_\mu|\Delta g(y)|^2 1_{\{y\leq -1\}} \qquad (3.6.18)$$

с постоянной $c_1 = c/(1+\frac{p}{p_1})$. Как результат, (3.6.18) выполнено, также как и (3.6.16), в классе всех монотонных функций g на $\mathbf{Z}$ при условии $g(0) = 0$.

Распространим теперь (3.6.16) и (3.6.18) на произвольные функции g с условием $g(0) = 0$. Определим функцию g^* следующим образом. Положим $g^*(0) = 0$ и

$$g^*(y) = \sum_{i=1}^{y} |g(i) - g(i-1)|, \quad \text{при} \quad y \geq 1,$$

$$g^*(y) = -\sum_{i=y}^{-1} |g(i) - g(i+1)|, \quad \text{при} \quad y \leq -1.$$

Тогда для всех $y \in \mathbf{Z}$ $|g^*(y)| \geq |g(y)|$ и

$$g^*(y+1) - g^*(y) = |g(y+1) - g(y)|.$$

Так как g^* не убывает и $g(0)=0$, в силу (3.6.16),

$$cp\,\mathbf{E}_\mu g(y)^2 \le cp\,\mathbf{E}_\mu g^*(y)^2 \le \mathbf{E}_\mu|\Delta g^*(y)|^2 = \mathbf{E}_\mu|\Delta g(y)|^2.$$

По тем же самым причинам g удовлетворяет и (3.6.18). Как следствие, $cp\,\mathrm{Var}_\mu(g) \le \mathbf{E}_\mu|\Delta g|^2$, и так как условие $g(0)=0$ не умаляет общности в (3.6.4), свойство d) доказано в общем случае.

Наконец, мы можем доказать (3.6.3) и значит свойство c), опираясь на (3.6.18). Также, как и для оператора Δ, нужно показать, что $c\,\mathbf{E}_\mu g^2 \le \mathbf{E}_\mu|\,\mathrm{M}\,g|^2$ для некоторой постоянной $c>0$, не зависящей от g, при условии $g(0)=0$. Сначала заметим, что

$$|\Delta g(y)|^2 \le 2(\mathrm{M}\,g(y))^2 + 2(\mathrm{M}\,g(y+1))^2$$

для всех $y \in \mathbf{Z}$. Следовательно, в силу (3.6.18),

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}c_1\ \mathrm{Var}_\mu(g) \le \ & \frac{1}{2}c_1\,\mathbf{E}_\mu g(y)^2 \\ & \le \mathbf{E}_\mu\left[(\mathrm{M}\,g(y))^2 1_{\{y\ge1\}} + (\mathrm{M}\,g(y-1))^2 1_{\{y\ge1\}}\right] \\ & + \mathbf{E}_\mu\left[(\mathrm{M}\,g(y))^2 1_{\{y\le-1\}} + (\mathrm{M}\,g(y+1))^2 1_{\{y\le-1\}}\right].\end{aligned}$$

Поэтому достаточно показать, что неравенства

$$\mathbf{E}_\mu(\mathrm{M}\,g(y-1))^2 1_{\{y\ge1\}} \le \alpha\,\mathbf{E}_\mu(\mathrm{M}\,g(y))^2 1_{\{y\ge0\}}, \tag{3.6.19}$$

$$\mathbf{E}_\mu(\mathrm{M}\,g(y+1))^2 1_{\{y\le-1\}} \le \beta\,\mathbf{E}_\mu(\mathrm{M}\,g(y))^2 1_{\{y\le0\}} \tag{3.6.20}$$

выполняются для некоторых постоянных α и β, не зависящих от g. На самом деле, (3.6.19)–(3.6.20) справедливы для любых неотрицательных функций V и, в частности, для $V=(\mathrm{M}\,g)^2$. Действительно, теперь мы можем воспользоваться неравенством (3.6.5) (поскольку свойство e) следует из d), а d) уже доказано). В частности, для всех $y\ge0$ целых

$$\mu(\{y\}) \ge c\,F_\mu(y)\,(1-F_\mu(y)) \ge c\,F_\mu(0)\,\mu(\{y+1\}).$$

Следовательно

$$\mathbf{E}_\mu V(y-1)\, 1_{\{y\ge 1\}} = \sum_{y=0}^{\infty} V(y)\mu(\{y+1\}) \le \frac{1}{c\, F_\mu(0)}\, \mathbf{E}_\mu V(y)\, 1_{\{y\ge 0\}}.$$

Это доказывает (3.6.19). Аналогично для $y \le -1$

$$\mu(\{y\}) \ge c\, F_\mu(y)\, (1 - F_\mu(y)) \ge c\, \mu(\{y-1\})\, (1 - F_\mu(-1)).$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\mu V(y+1)\, 1_{\{y\le -2\}} &= \sum_{y=-\infty}^{-1} V(y)\mu(\{y-1\}) \\ &\le \frac{1}{c\,(1 - F_\mu(-1))}\, \mathbf{E}_\mu V(y)\, 1_{\{y\le -1\}}. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\mathbf{E}_\mu V(y+1)\, 1_{\{y=-1\}} = V(0)\, \mu(\{-1\}) \le \frac{1}{p}\, \mathbf{E}_\mu V(y)\, 1_{\{y=0\}}.$$

Так как $F_\mu(0) \ge p > 0$ и $1 - F_\mu(-1) \ge p > 0$, приходим к (3.6.20), складывая полученные неравенства. Лемма 3.6.6 и с ней теорема 3.6.1 теперь доказаны.

§ 3.7. Примечания

Результаты §§ 3.1 и 3.2 основаны на работе [74], а §§ 3.3–3.6 – на работе [75].

Основным мотивом к теореме 3.2.1 послужила статья Талаграна [216] (уточнению теоремы 1.1 этой работы посвящен § 3.5). Как уже отмечалось, в качестве функциональной формы для неравенств вида (3.5.2) Талагран рассматривал неравенства для дисперсии функций g на дискретном кубе вида

$$c\,I(\operatorname{Var} g) \leq \mathbf{E}\,\mathrm{M}\,g, \quad 0 \leq g \leq 1. \tag{3.7.1}$$

При некоторых ограничениях на функцию I такие неравенства могут обобщены с двухточечного пространства $\{0,1\}$ на "многомерный" дискретный куб $\{0,1\}^n$. При этом постоянная c ухудшится, но останется не зависящей от "размерности" n. В этом смысле (3.7.1) ведет себя хуже по сравнению с (3.5.5), и вряд ли можно вывести гауссовское изопериметрическое неравенство на основе дискретного неравенства вида (3.7.1). Кроме того, при многомерном обобщении (3.7.1), по-видимому, происходит ухудшение в зависимости постоянной c от параметра p.

В свою очередь, мотивом для [216] послужила теорема Маргулиса о свойстве "threshold phenomenon". Близким вопросам, связанным с оцениванием величин (т.н. "influences") $\mathbf{P}\,(A_i)$, где $A_i = \{x \in A : s_i(x) \notin A\}$, посвящены две другие работы Талаграна [218], [223] (см. также Кан, Калай и Линиал [157] и др. работы: [92], [93], [132]). В [218] были доказаны дискретные неравенства изопериметрического типа, близкие к логарифмическому неравенству Гросса на дискретном кубе, причем основной шаг состоял в получении неравенств типа Хинчина–Кахана $\|Q\|_\alpha \leq c\,\|Q\|_\beta$ (при $\alpha > \beta = 2$) для полиномов Q от (не-симметрично распределенных) независимых бернуллиевских величин. Когда Q – норма, такие неравенства интенсивно исследовались многими авторами, в частности, на основе изопериметрических неравенств. В классе же полиномов неравенства типа Хинчина–Кахана исследованы лишь по отношению к некоторым распределениям, как то: равномерное распределение на выпуклом множестве в евклидовом пространстве (Бурган [91]), нормальное и гамма-распределение (Прохоров [32], [33], см. также [77]).

Пусть $\mathbf{P} = \mu_p^n$ – продакт-мера на $\{0,1\}^n$. Для $A \subset \{0,1\}^n$ рассмотрим множество $\partial_+ A = \partial A \cap A$, состоящее из граничных точек с "внутренней" стороны. Так как $h_A \leq n\, 1_{\partial A}$, неравенства (3.3.2) и (3.5.2) влекут оценки

$$\mathbf{P}\,(\partial A) \geq \frac{1}{\sqrt{2npq}}\, I(\,\mathbf{P}\,(A)), \tag{3.7.2}$$

$$\mathbf{P}\,(\partial_+ A) \geq \frac{c_p}{\sqrt{n}}\, I(\,\mathbf{P}\,(A)), \quad c_p = \frac{K_0}{\sqrt{\log(1/pq)}}\,, \tag{3.7.3}$$

где I – гауссовская изопериметрическая функция, и K_0 – абсолютная постоянная. Правая часть в (3.7.2) имеет правильный порядок по паре переменных $(p, \mathbf{P}\,(A))$, что показывает уже пример множеств вида $A_n = \{S_n \leq k\}$, $k = [np + a\sqrt{npq}\,]$: в этом случае $\sqrt{npq}\, \mathbf{P}\,(\partial A_n) \to 2\,\varphi(a)$ и $I(\,\mathbf{P}\,(A_n)) \to \varphi(a)$ при $n \to \infty$. Пример таких множеств указывает и на правильный порядок в зависимости правой части (3.7.3) от $I(\,\mathbf{P}\,(A))$, и кроме того, указанная постоянная c_p тоже ме может быть улучшена с точностью до абсолютного множителя, что можно проверить на множествах $\{S_n = 0\}$ и $\{S_n = 1\}$.

Множители перед $I(\,\mathbf{P}\,(A))$ в (3.7.2)–(3.7.3) как функции параметра p по-разному ведут себя при $p \to 0$ (и, как следствие, (3.7.2), в отличие от (3.7.3), допускает пуассоновский аналог). Однако, если отвлечься от параметра p, то, конечно, (3.7.3) – более сильное неравенство, так как множество $\partial_+ A$ может быть существенно меньше, чем ∂A. Впервые неравенство вида (3.7.3) было получено в 1974 г. Маргулисом [23] (как следствие его теоремы), правда, для функции $I(t) = t(1-t)$. В 1976 г. Альсведе, Гакс и Кернер [51] доказали такое неравенство уже для гауссовской изопериметрической функции I с постоянной $c_p = \frac{\min(p,q)}{3\sqrt{\log(1/\min(p,q))}}$ (где $q = 1-p$) (ими был, повидимому, впервые использован тот факт, что I удовлетворяет дифференциальному уравнению $I''I = -1$; см. также Альсведе и Катона [52]). Следующее улучшение было сделано Талаграном, доказавшим более сильное неравенство (3.5.2) с постоянной $c_p = K_0\sqrt{pq}$.

Сказанное, конечно, не относится к каноническому случаю $p = \frac{1}{2}$, для которого (3.7.3) – прямое следствие теоремы Харпера [147], которая дает описание экстремальных множеств, минимизирующих $\mathbf{P}(\partial_+ A)$ при фиксированном значении $\mathbf{P}(A) = t$ (теорема Харпера была переоткрыта Катоной [158], см. также [131], [229]). Однако, при $p \neq \frac{1}{2}$ задача об экстремальных множествах до сих пор остается нерешенной (в этом общем случае условие $\mathbf{P}(A) = t$ следует заменить на условие $\mathbf{P}(A) \geq t$). Тем не менее, задача о концентрации продакт-мер $\mathbf{P} = \mu_1 \times \cdots \times \mu_n$ на дискретном кубе и, более общо, на $\mathbf{R}^n$ по отношению к метрике ℓ^1 (т.е., расстоянию Хамминга в случае дискретного куба) хорошо изучена. В частности, известно такое неравенство для продакт-мер $\mathbf{P}$ на $\{0,1\}^n$ ([216]):

$$\mathbf{P}(A^h) \geq 1 - \frac{1}{\mathbf{P}(A)}\, e^{-h^2/n}, \quad h \geq 0. \tag{3.7.4}$$

При $p = \frac{1}{2}$ с точностью до абсолютной постоянной в экспоненте, это неравенство очень близко к точному изопериметрическому неравенству, соответствующему теореме Харпера (однако, до сих пор неизвестно, справедливо ли неравенство $1 - \mathbf{P}(A^h) \leq c\, e^{-2h^2/n}$ при $p \neq \frac{1}{2}$, $\mathbf{P}(A) \geq \frac{1}{2}$ для некоторой абсолютной постоянной c). Если не требовать, чтобы маргинальные распределения μ_i были сосредоточены на $\{0,1\}$, то неравенство типа (3.7.4) не может выполняться, и можно ожидать любое поведение $\mathbf{P}(A^h)$. Тем не менее, можно контролировать поведение $\mathbf{P}(A^h)$, например, в терминах дисперсии $\sigma^2(\mathbf{P}) = \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(\mu_i)$. Именно, справедливо такое утверждение, доказанное в [79]: для всех $h > 0$, $\sigma > 0$ и $p \in (0,1)$

$$\inf_{\sigma^2(\mathbf{P})=\sigma^2} \ \inf_{\mathbf{P}(A)\geq p} \mathbf{P}(A^h) = \begin{cases} p, & \text{если} \quad h \leq \dfrac{\sigma}{\sqrt{pq}} \\ 1 - \dfrac{p\sigma^2}{ph^2 - \sigma^2}\,, & \text{если} \quad h \geq \dfrac{\sigma}{\sqrt{pq}} \end{cases}$$

(равенство возможно уже в случае $n=1$, причем экстремальными при $h > \dfrac{\sigma}{\sqrt{pq}}$ оказываются меры, носитель которых состоит из трех точек).

Близкой по духу к изопериметрической задаче на дискретном кубе является задача об оценивании снизу функционала

$$L_A = \int h_A \, d\mathbf{P}$$

в терминах $\mathbf{P}(A)$. При $p = \frac{1}{2}$ L_A с точностью до множителя 2^{-n-1} представляет собой число граничных ребер A (то есть, число таких пар (x, y), что $x \in A$, $y \notin A$, и $x_i = y_i$ для всех $i \leq n$ за исключением одного значения). В этом случае множества, минимизирующие L_A при фиксированном значении $\mathbf{P}(A) = t$, были описаны в 1964 г. Харпером [146] и Линдси [182]. Их результаты неоднократно переоткрывались и обобщались [67], [118], [119], [161], [148], [86]. История вопроса описана в работе Альсведе и Кая [53], см. также [50]. Экстремальными в этой задаче оказываются множества, состоящие из первых $2^n t$ точек дискретного куба, если расположить его элементы в лексикографическом порядке. В частности, при $t = 2^{k-n}$ это будут "подкубы" $\{0,1\}^k \times \{0\}^{n-k}$, и значит при таких t справедливо неравенство

$$L_A \geq -2\,\mathbf{P}(A) \log_2 \mathbf{P}(A) \tag{3.7.5}$$

(с равенством на подкубах). На самом деле, это неравенство имеет место для всех t (то есть, для всех A), что легко обнаружить, если записать (3.7.5) в функциональной форме

$$\mathbf{E}|\nabla g|^2 \geq 2\,\mathrm{Ent}(g^2), \tag{3.7.6}$$

где g – произвольная функция на $\{0,1\}^n$ со значениями в $\{0,1\}$ (здесь $|\nabla g|$ обозначает модуль дискретного градиента, и $\mathrm{Ent}(g^2) = \mathbf{E}g^2 \log_2 g^2 - \mathbf{E}g^2 \log_2 \mathbf{E}g^2$). При $n = 1$ это неравенство очевидно, следовательно оно верно при всех n в силу известного свойства аддитивности энтропии (правда, при $\mathbf{P}(A) \neq 2^{k-n}$ (3.7.6) уже не несет в себе информацию об экстремальных множествах). Если в (3.7.6) $\log_2$ (в определении энтропии) заменить на натуральный логарифм, то оно станет с точностью до множителя перед $\mathrm{Ent}(g^2)$ слабее, но будет справедливым уже для всех функций g на дискретном кубе. Такое логарифмическое неравенсво типа Соболева было открыто Бонами [87] в 1970 г. и переоткрыто Гроссом [138] в 1975 г., связавшим (3.7.6) с гауссовским логарифмическим неравенством.

Дискретные неравенства типа Пуанкаре изучались в основном в контексте теории конечных графов по отношению к равномерному распределению (на множестве вершин). См., напр., работу Алона и Мильмана [57], где получено неравенство для концентрации меры в терминах λ_1 ("дискретная" версия неравенства Громова–Мильмана (0.29)). Вероятностные меры μ на $\mathbf{Z}$, удовлетворяющие для всех функций g на $\mathbf{Z}$ неравенству

$$\mathrm{Var}(g) \leq C\,\mathbf{E}|g(x+1) - g(x)|^2 \tag{3.7.7}$$

при некотором (конечном) C, были описаны Лу [184]. Именно, положим $p(x) = \mu(\{x\})$, $F(x) = \mu((-\infty, x])$, $x \in \mathbf{Z}$. Тогда, согласно [184], (3.7.7) эквивалентно тому, что для некоторого $c > 0$ линейное разностное уравнение

$$\Delta g(x-1)\,p(x-1) - (\Delta g(x) + cg(x))\,p(x) = 0$$

имеет строго монотонное решение g, такое что $\mathbf{E}|g| < +\infty$ (где $\Delta g(x) = g(x+1) - g(x)$). Такое описание почти идентично характеризации мер, полученной Ченом и Лу [111] для обычных "непрерывных" неравенств типа Пуанкаре. Видимо рекурсивно решая это разностное уравнение (отталкиваясь от некоторой точки $x_0 \in supp(\mu)$), Лу доказывает, что (3.7.7) равносильно такому свойству:

$$\sup_{x \geq x_0} (1 - F(x)) \sum_{k=x_0}^{x} \frac{1}{p(k)} < +\infty, \qquad \sup_{x \leq x_0 - 1} F(x) \sum_{k=x}^{x_0-1} \frac{1}{p(k)} < +\infty.$$

Нетрудно видеть, что эти условия влекут более простое соотношение (3.6.5) из теоремы 3.6.1, но обратное утверждение не кажется нам очевидным.

Наконец отметим, что теорема 3.1.3 о характеризации гауссовских мер через изопериметрическое свойство полупространств была высказана без доказательства в [71] и доказана в [8]. Доказательство этой теоремы можно упростить, не рассматривая одномерный случай, влекущий конечность экспоненциального момента, если из неравенства

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\xi + \eta}{\sqrt{2}} < h\right\} \geq \mathbf{P}\{\xi < h\}, \quad h > 0,$$

извлечь гауссовость (независимых, симмерично и одинаково распределенных) с.в. ξ и η без каких-либо моментных предположений. Такое утверждение было недавно доказано Квапенем, Пусией и Шахермаером [167], а также Олешкевичем и Пусией [197].

ГЛАВА IV. ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИЕ КОНСТАНТЫ, НЕРАВЕНСТВА ТИПА ПУАНКАРЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА ТИПА СОБОЛЕВА

§ 4.1. Обобщение теоремы Чигера на пространства Орлича

Пусть (M, ρ, μ) – метрическое пространство, снабженное (борелевской) вероятностной мерой μ. Нашей ближайшей целью будет получение "непрерывных" аналогов теоремы 3.5.2 для продакт-мер $\mathbf{P} = \mu^n$ в пространстве M^n по отношению к метрике евклидового типа ρ_2. В качестве базового у нас будет выступать изопериметрическое неравенство в M вида

$$\mu^+(A) \geq c \min\{\mu(A), 1 - \mu(A)\}, \quad A \subset M. \tag{4.1.1}$$

Оптимальная постоянная c в (4.1.1), которую мы далее обозначаем через $Is(\mu)$, называется изопериметрической константой в смысле Чигера (или просто изопериметрической константой). Таким образом,

$$Is(\mu) = \inf_{0<\mu(A)<1} \frac{\mu^+(A)}{\min\{\mu(A), 1 - \mu(A)\}}, \tag{4.1.2}$$

где инфимум берется по всем измеримым (по Борелю) множествам $A \subset M$ меры $0 < \mu(A) < 1$. Чтобы это определение было корректным (то есть, чтобы такие множества A существовали), необходимо предполагать, чтобы мера μ не была дельта-мерой, т.е., единичной массой в какой-нибудь точке. В таком тривиальном и не представляющем какого-либо интереса случае следует положить, согласно (4.1.1), $Is(\mu) = +\infty$ (считая, что $0 \cdot \infty = 0$).

Мы хотим распространить неравенство (4.1.1) на многомерное пространство (M^n, μ^n, ρ_2) с возможно другой, однако, не зависящей от размерности n, постоянной c. Такое предположение оказывается верным, и более того, изопериметрическая константа $Is(\mu^n)$ может быть оценена снизу через $Is(\mu)$ с точностью до абсолютного множителя (заметим, что последовательность $Is(\mu^n)$ – невозрастающая). Доказательство этого факта основано на функциональной форме (3.1.4) с функцией $I(t) = ct(1-t)$, и как обычно, нам нужно доказать нечто большее по сравнению с изопериметрическим неравенством (4.1.1) для размерности $n = 1$. Это "большее" в данном случае есть неравенство типа Пуанкаре в пространстве Орлича $L_\Psi(M, \mu)$ с такой порождающей функцией Юнга Ψ, которая ведет себя как $|x|^2$ при малых $x \in \mathbf{R}$ и $|x|$ при больших x.

В качестве предварительного шага к основной теореме, в этом параграфе мы докажем следующее утверждение. Пусть Ψ – произвольная функция Юнга, такая что

$$C_\Psi = \sup_{x>0} \frac{x\Psi'(x)}{\Psi(x)} < +\infty,$$

где Ψ' – производная Радона–Никодима функции Ψ (очевидно, C_Ψ не зависит от выбора Ψ'). Напомним, что норма в пространстве $L_\Psi(M, \mu)$ определяется равенством

$$\|g\|_\Psi = \inf\left\{\lambda > 0 : \mathbf{E}\Psi\left(g/\lambda\right) \le 1\right\}$$

(математическое ожидание понимается в смысле меры μ). При этом будем считать, что $\|g\|_\Psi = +\infty$, если $g \notin L_\Psi(M, \mu)$.

Далее $m(g)$ обозначает медиану функции g на M. При этих предположениях и обозначениях справедлива

Теорема 4.1.1. Пусть $Is(\mu) > 0$. Тогда для любой функции g на M, имеющей конечную липшицеву константу на всех шарах в M и такой что $m(g) = 0$,

$$\|g\|_\Psi \le \frac{C_\Psi}{Is(\mu)}\, \|\nabla g\|_\Psi, \tag{4.1.3}$$

$$\mathbf{E}\Psi(g) \le \mathbf{E}\Psi\Big(\frac{C_\Psi}{Is(\mu)}\,|\nabla g|\Big). \tag{4.1.4}$$

В том случае, когда $\Psi(x) = |x|^2$, имеем $C_\Psi = 2$, и так как всегда $\mathbf{E}|g - \mathbf{E}g|^2 \le \mathbf{E}|g - m(g)|^2$, получаем следующее

Следствие 4.1.1. Пусть $Is(\mu) > 0$. Наилучшая постоянная λ_1 в неравенстве

$$\lambda_1 \mathbf{E}|g - \mathbf{E}g|^2 \le \mathbf{E}|\nabla g|^2 \tag{4.1.5}$$

(где $g \in L^2(M,\mu)$ – произвольная функция на M, имеющая конечную липшицеву константу на всех шарах) удовлетворяет соотношению

$$\lambda_1 \ge \frac{Is(\mu)}{4}\,. \tag{4.1.6}$$

Это соотношение – так называемое неравенство Чигера, доказанное Чигером в контексте римановой геометрии [108]. На компактных римановых многообразиях неравенство типа Пуанкаре (4.1.5) (по отношению к римановой метрике и нормализованной мере Лебега на M) определяет λ_1 как первое нетривиальное собственное число оператора Лапласа. Это неравенство, однако, имеет смысл для произвольных метрических вероятностных пространств, при этом теорема Чигера остается в силе. Более того, оценка для λ_1 не может быть улучшена в терминах изопериметрической константы, так как (4.1.6) превращается в равенство для распределений μ на $M = \mathbf{R}$, имеющих плотность вида $\alpha e^{-\alpha x}$, $x > 0$ ($\alpha > 0$ – параметр).

Более общо, применяя (4.1.3)–(4.1.4) к $\Psi(x) = |x|^p$ при $p \ge 1$, получаем неравенство (тоже принадлежащее к классу неравенств типа Пуанкаре)

$$\frac{Is(\mu)}{p}\,\|g - m(g)\|_p \le \|\nabla g\|_p, \tag{4.1.7}$$

и снова показательное распределение μ оказазывается экстремальным в том смысле, что в этом случае множитель $\dfrac{Is(\mu)}{p}$ будет оптимален (что, очевидно, если протестировать (4.1.7) на функциях вида $g(x) = e^{tx}$ при $t \to 1/p$). Значит этот множитель не может быть улучшен, если мы располагаем только значением $Is(\mu)$.

Доказательство теоремы Чигера и более общо – неравенства (4.1.7) – элементарно. Приведем его при $p = 2$. Теорему Ротхауза 1.6.1 можно применить к функционалу $L(g) = \mathbf{E}|g - m(g)|$. Так как $L(1_A) = L(-1_A) = \min\{\mu(A), 1 - \mu(A)\}$, изопериметрическое неравенство (4.1.1) эквивалентно аналитическому неравенству

$$c\mathbf{E}|g| \leq \mathbf{E}|\nabla g| \tag{4.1.8}$$

в предположении, что $m(g) = 0$ (то есть, неравенству (4.1.7) при $p = 1$ и $c = Is(\mu)$). Предполагая также, что $\mu(g = 0) = 0$ (это, конечно, не умаляет общности), и применяя (4.1.8) к функциям $(g^+)^2$ и $(g^-)^2$, получаем соответственно

$$c\,\mathbf{E}|g|^2\, 1_{\{g>0\}} \leq 2\,\mathbf{E}|g||\nabla g|\, 1_{\{g>0\}}, \quad c\,\mathbf{E}|g|^2\, 1_{\{g<0\}} \leq 2\,\mathbf{E}|g||\nabla g|\, 1_{\{g<0\}}.$$

Складывая эти неравенства, получаем $c\mathbf{E}|g|^2 \leq \mathbf{E}|g||\nabla g|$. В силу неравенства Коши-Буняковского, $(c\,\mathbf{E}|g|^2)^2 \leq 4\,\mathbf{E}|g|^2\mathbf{E}|\nabla g|^2$, следовательно

$$c\,\mathbf{E}|g|^2 \leq 4\,\mathbf{E}|\nabla g|^2,$$

и мы приходим к (4.1.7) при $c = Is(\mu)$.

Тот факт, что (4.1.8) является функциональной формой для (4.1.1), был конечно известен задолго до результата Ротхауза и, в частности, это использовал Чигер. Непосредственно в силу леммы 1.6.1 ("coarea-неравенство"), имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\,|\nabla g| &\geq \int_{-\infty}^{+\infty} \mu^+(g > t)\, dt \\ &\geq c\int_{-\infty}^{0} (1 - \mu(g > t))\, dt + c\int_{0}^{+\infty} \mu(g > t)\, dt = c\,\mathbf{E}|g|,\end{aligned}$$

что и доказывает (4.1.8).

При $p \neq 2$ доказательство неравенства (4.1.7) не изменится с той лишь разницей, что нужно будет использовать неравенство Гельдера вместо неравенства Коши-Буняковского. В общем же случае, чтобы получить (4.1.3)–(4.1.4) для произвольных функций Юнга (а нас будет в первую очередь интересовать функция $\Psi(x) = \sqrt{1+x^2} - 1$), нам придется найти соответствующее нашим нуждам обобщение неравенства Гельдера. Таким обобщением служит следующее утверждение.

Лемма 4.1.1. Пусть (M, μ) – пространство с мерой, и пусть $\Psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ – дифференцируемая выпуклая функция. Пусть u и v – измеримые функции на M, такие что

$$\int_M \Psi(u)\, d\mu \leq \int_M \Psi(v)\, d\mu. \tag{4.1.9}$$

Тогда

$$\int_M \Psi'(v) u\, d\mu \leq \int_M \Psi'(v) v\, d\mu \tag{4.1.10}$$

(при условии, что интегралы в (4.1.10) существуют).

Заметим, что интегралы в (4.1.9) корректно определены.

Чтобы получить неравенство Гельдера как частный случай, можно применить лемму 4.1.1 к $\Psi(x) = |x|^p$, $u = f$, $v = g^{1/(p-1)}$, где $f, g \geq 0$ таковы, что $\|f\|_p = 1$, $\|g\|_q = 1$ ($q = p/(p-1)$ – сопряженное число). Тогда в (4.1.9) мы имеем равенство, в то время как (4.1.10) становится

$$\int_M fg\, d\mu \leq 1 = \|f\|_p \|g\|_q.$$

Доказательство леммы (А.В. Жубр). Не умаляя общности, будем считать, что мера μ конечна, а функции u и v ограничены. В силу выпуклости Ψ, при $0 \leq t \leq 1$ имеем

$$\int_M \Psi(tu + (1-t)v)\, d\mu \leq t \int_M \Psi(u)\, d\mu + (1-t) \int_M \Psi(v)\, d\mu. \tag{4.1.11}$$

Заметим, что (1.4.11) превращается в равенство при $t = 0$ (и $t = 1$), и что левая часть (1.4.11) представляет собой выпуклую функцию по переменной t, в то время как правая часть – линейна (точнее, аффинна). Следовательно, мы имеем то же самое неравенство для производных этих функций в точке $t = 0$:

$$\int_M \Psi'(v)(u-v)\,d\mu \le \int_M \Psi(u)\,d\mu - \int_M \Psi(v)\,d\mu.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 4.1.1. Сначала докажем (4.1.3). Ввиду однородности этого неравенства, можно считать что $\|g\|_\Psi = 1$, то есть, $\mathbf{E}\Psi(g) = 1$ (используя, если необходимо, усечения, условие $g \in L_\Psi(M,\mu)$ может быть впоследствии снято). Не умаляя общности, можно также предполагать, что Ψ дифференцируема на всей числовой прямой, и в частности, $\Psi'(0) = 0$.

Как и при выводе (4.1.7), снова воспользуемся неравенством (4.1.8) при $c = Is(\mu)$. Рассмотрим функции $\Psi(g^+)$ и $\Psi(g^-)$. Очевидно, они имеют конечную липшицеву константу на всех шарах в M, и $m(\Psi(g^+)) = m(\Psi(g^-)) = 0$. Следовательно, к ним можно применить (4.1.8). Оценим модули градиентов этих функций. На открытом множестве $\{g < 0\}$ $\Psi(g^+) = 0$, поэтому $|\nabla\Psi(g^+)| = 0$. На открытом множестве $\{g > 0\}$ имеем $|\nabla\Psi(g^+)| \le \Psi'(|g|)|\nabla g|$. Наконец, если $g(x) = 0$, то непосредственно по определению модуля градиента и в силу условия $\Psi'(0) = 0$, имеем $|\nabla\Psi(g^+(x))| = 0$. Таким образом, $|\nabla\Psi(g^+)| \le \Psi'(|g|)|\nabla g|\,1_{\{g>0\}}$. Аналогично $|\nabla\Psi(g^-)| \le \Psi'(|g|)|\nabla g|\,1_{\{g<0\}}$. С учетом (4.1.8), получаем

$$c\,\mathbf{E}\Psi(g^+) \le \mathbf{E}\Psi'(|g|)|\nabla g|\,1_{\{g>0\}},$$

$$c\,\mathbf{E}\Psi(g^-) \le \mathbf{E}\Psi'(|g|)|\nabla g|\,1_{\{g>0\}}.$$

Складывая эти неравенства, приходим к неравенству

$$c\,\mathbf{E}\Psi(g) \le \mathbf{E}\Psi'(|g|)|\nabla g|. \tag{4.1.12}$$

Применим теперь лемму 4.1.1 к $u = \frac{|\nabla g|}{\|\nabla g\|_\Psi}$, $v = |g|$. Поскольку $\mathbf{E}\Psi(u) = \mathbf{E}\Psi(v) = 1$, в силу (4.1.12) и (4.1.10),

$$\begin{aligned} c\,\mathbf{E}\Psi(g) &\le \|\nabla g\|_\Psi \mathbf{E}\Psi'(v)u \le \|\nabla g\|_\Psi \mathbf{E}\Psi'(v)v \\ &= \|\nabla g\|_\Psi \mathbf{E}\Psi'(|g|)|g| \le C_\Psi \|\nabla g\|_\Psi \mathbf{E}\Psi(g). \end{aligned}$$

Следовательно, $c \le C_\Psi \|\nabla g\|_\Psi$, и так как $\|g\|_\Psi = 1$, неравенство (4.1.3) доказано.

Чтобы получить (4.1.4), не умаляя общности, можно предположить, что $\alpha = \mathbf{E}\Psi(g) < +\infty$. Применим (4.1.3) к функции Юнга $\Psi_\alpha = \Psi/\alpha$. Так как $C_{\Psi_\alpha} = C_\Psi$ и $\|g\|_{\Psi_\alpha} = 1$, имеем, согласно (4.1.3), $\|\nabla g\|_{\Psi_\alpha} \ge \frac{c}{C_\Psi}$, то есть, $\mathbf{E}\Psi_\alpha\big(\frac{C_\Psi}{c}\,|\nabla g|\big) \ge 1$, что и означает (4.1.4). Теорема 4.1.1 доказана.

§ 4.2. Изопериметрические константы для продакт-мер. Многомерные неравенства типа Пуанкаре

Теперь мы можем установить основную теорему об изопериметрических константах. Пусть (M, ρ) – сепарабельное метрическое пространство, снабженное вероятностной мерой μ. Напомним, что в M^n метрика ρ_2 (евклидового типа) определяется равенством

$$\rho_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \rho(x_i, y_i)^2}, \quad x, y \in M^n.$$

В такой абстрактной ситуации будем предполагать, что для всех $n \geq 1$ и для всех липшицевых функций g на (M^n, ρ_2) для μ^n-почти всех $x \in M^n$

$$|\nabla g(x)|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\nabla_{x_i} g(x)|^2, \tag{4.2.1}$$

где $|\nabla_{x_i} g(x)|$ означает модуль градиента функции $x_i \to g(x)$ (значения x_j при $j \neq i$ фиксированы). Это условие заведомо выполнено, когда $M = \mathbf{R}^k$ – евклидово пространство, и мера μ абсолютно непрерывна (по отношению к мере Лебега). В случае $M = \mathbf{R}$ это условие будет позднее снято.

Теорема 4.2.1. Для всех $n \geq 1$

$$Is(\mu^n) \geq \frac{1}{2\sqrt{6}}\, Is(\mu). \tag{4.2.2}$$

При этом для любой функции $g : M^n \to [0, 1]$, имеющей конечную липшицеву константу на всех шарах в M^n,

$$\mathrm{Var}(g) \leq K\, \mathbf{E} \min\left(\frac{1}{Is(\mu)}\, |\nabla g|, \frac{1}{Is^2(\mu)}\, |\nabla g|^2 \right), \tag{4.2.3}$$

где K – абсолютная постоянная (можно взять $K = 288$), а математическое ожидание и дисперсия понимаются в смысле меры μ^n.

Неравенство (4.2.3) содержит в себе как частные случаи неравенства типа Пуанкаре одновременно для L^1- и L^2-нормы модуля градиента:

$$\mathrm{Var}(g) \leq \frac{K}{Is(\mu)}\,\mathbf{E}|\nabla g|, \tag{4.2.4}$$

$$\mathrm{Var}(g) \leq \frac{K}{Is^2(\mu)}\,\mathbf{E}|\nabla g|^2. \tag{4.2.5}$$

Причем, если первое неравенство – неоднородное, то второе – однородное, и поэтому условие $0 \leq g \leq 1$ в (4.2.5) может быть снято. Напомним, что (4.2.4) эквивалентно изопериметрическому неравенству

$$(\mu^n)^+(A) \geq \frac{Is(\mu)}{K}\,\mu^n(A)(1-\mu^n(A)), \quad A \subset M^n, \tag{4.2.6}$$

откуда первое утверждение теоремы 4.1.1 – неравенство (4.2.2) – следует с худшей, но все еще с абсолютной постоянной. Напомним также, что однородным аналитическим неравенством, эквивалентным (4.2.4) и (4.2.6) является неравенство

$$\mathbf{E}|g - \mathbf{E}g| \leq \frac{2K}{Is(\mu)}\,\mathbf{E}|\nabla g|. \tag{4.2.7}$$

Используя (4.2.2), неравенства (4.2.5) и (4.2.7) можно представить с точностью до абсолютных множителей как частные случаи более общего неравенства типа Пуанкаре. Пусть Ψ – произвольная функция Юнга, такая что $C_\Psi < +\infty$. Предположим, что выполнены условия теоремы 4.2.1.

Теорема 4.2.2. Для любой функции g на M^n, суммируемой по мере μ^n и имеющей конечную липшицеву константу на всех шарах в M^n,

$$\|g - \mathbf{E}g\|_\Psi \leq \frac{4\sqrt{6}C_\Psi}{Is(\mu)}\,\|\nabla g\|_\Psi. \tag{4.2.8}$$

Кроме того,

$$\mathbf{E}\Psi(g - \mathbf{E}g) \leq \mathbf{E}\Psi\left(\frac{4\sqrt{6}C_\Psi}{Is(\mu)}\,|\nabla g|\right). \tag{4.2.9}$$

Когда $\Psi(x) = |x|^p$, $p \geq 1$, имеем $C_\Psi = p$, и (4.2.8) запишется как неравенство

$$\|g - \mathbf{E}g\|_p \leq \frac{4p\sqrt{6}}{Is(\mu)}\,\|\nabla g\|_p, \tag{4.2.10}$$

причем множитель (как функция p) имеет правильный порядок возрастания при $p \to \infty$ (если известно только значение $Is(\mu)$). Это справедливо уже в одномерном случае, когда $M = \mathbf{R}$ и μ – показательное распределение. Для гаусовской меры $\mu = \gamma_n$ неравенства для L^p-нормы типа (4.2.10) хорошо известны с почти оптимальной постянной порядка $\sqrt{p}$ (Пизье [203]; точное значение этой постоянной известно лишь лишь при $p = 2$). Для сужения меры Лебега на ограниченные области неравенства вида (4.2.10) впервые появились в книге Куранта и Гильберта [120].

Доказательство теоремы 4.2.1. Сначала покажем, что в M выполняется неравенство

$$I(\mathbf{E}g) \leq \mathbf{E}\sqrt{I(g)^2 + C^2|\nabla g|^2}, \tag{4.2.11}$$

где $g : M \to [0,1]$ – произвольная липшицева функция,

$$I(t) = 4\,t(1-t) \quad \text{и} \quad C = \frac{4\sqrt{6}}{Is(\mu)}\,.$$

Так как $I(\mathbf{E}g) - \mathbf{E}I(g) = 4\,\mathrm{Var}(g)$, (4.2.11) можно записать в виде

$$4\,\mathrm{Var}(g) \leq \mathbf{E}\big[\sqrt{I(g)^2 + C^2|\nabla g|^2} - I(g)\big]. \tag{4.2.12}$$

Поскольку функция вида $s \to \sqrt{s^2 + u^2} - s$ не возрастает на полуоси $s \geq 0$, и так как $s = I(g) \leq 1$, (4.2.12) будет вытекать из более сильного неравенства

$$4\,\mathrm{Var}(g) \leq \mathbf{E}\sqrt{1 + C^2|\nabla g|^2} - 1. \tag{4.2.13}$$

Применим теорему 4.1.1 к функции Юнга $\Psi(x) = \sqrt{1+x^2} - 1$. Прямой подсчет дает $C_\Psi = 2$, и согласно (4.1.4), для любой липшицевой функции g на M

$$\mathbf{E}\Psi(g - m(g)) \leq \mathbf{E}\Psi\Big(\frac{2}{Is(\mu)}\,|\nabla g|\Big). \tag{4.2.14}$$

Мы имеем дополнительное условие $0 \le g \le 1$, так что $|g - m(g)| \le 1$. Используя элементарное неравенство $4x^2 \le \sqrt{1 + 24x^2} - 1$, справедливое при $|x| \le 1$, и применяя (4.2.14) к функции $\sqrt{24}\,g$, получаем

$$4\mathbf{E}|g - m(g)|^2 \le \mathbf{E}\Psi\Big(\frac{4\sqrt{6}}{Is(\mu)}\,|\nabla g|\Big),$$

откуда (4.2.13) вытекает в силу того, что $\mathbf{E}|g - m(g)|^2 \ge \mathrm{Var}(g)$.

Таким образом, (4.2.11) доказано, и следовательно, в силу теоремы 3.1.1, это неравенство выполняется и в пространстве (M^n, ρ_2, μ^n) в классе всех липшицевых функций $g : M^n \to [0,1]$. Аппроксимируя индикаторные функции 1_A липшицевыми (как в лемме 1.4.1), из многомерного варианта (4.2.11) получаем изопериметрическое неравенство

$$(\mu^n)^+(A) \ge \frac{Is(\mu)}{\sqrt{6}}\,\mu^n(A)(1 - \mu^n(A)), \quad A \subset M^n. \tag{4.2.15}$$

С учетом того, что $t(1-t) \ge \frac{1}{2}\min\{t, 1-t\}$, получаем первое утверждение теоремы 4.2.1.

Поскольку мы установили (4.2.2), выполняется и многомерный вариант неравенства (4.2.13) с постоянной

$$C = \frac{4\sqrt{6}}{Is(\mu^n)} \le \frac{48}{Is(\mu)}\,.$$

Следовательно, используя при $x = \frac{48}{Is(\mu)}\,|\nabla g|$ элементарное неравенство $\sqrt{1 + x^2} - 1 \le \min\{x, \frac{1}{2}\,x^2\}$, получаем

$$4\,\mathrm{Var}(g) \le \mathbf{E}\min\Big\{\frac{48}{Is(\mu)}\,|\nabla g|, \frac{48^2}{2Is^2(\mu)}\,|\nabla g|^2\Big\},$$

что влечет (4.2.3) с $K = 288$. Теорема 4.1.1 доказана.

Замечание 4.2.1. Теорема 4.1.1 может быть легко обобщена (с тем же доказательством) на произведение разных пространств

$(M_i, \rho_i, \mu_i)_{1 \le i \le n}$. По отношению к метрике евклидового типа, если выполнено условие (4.2.1), имеет место оценка

$$Is(\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n) \ge \frac{1}{2\sqrt{6}} \min_{1 \le i \le n} Is(\mu_i).$$

Обратное неравенство $Is(\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n) \le \min_{1 \le i \le n} Is(\mu_i)$ тривиально.

Доказательство теоремы 4.2.2.

Применим теорему 4.1.1 и 4.2.1 к пространству $(M^{2n}, \rho_2, \mu^{2n})$ и функции $g^*(x, y) = g(x) - g(y)$, $x, y \in M$. Так как $m(g^*) = 0$ (по отношению к μ^{2n}), имеем

$$\|g^*\|_\Psi \le \frac{2\sqrt{6}C_\Psi}{Is(\mu)} \|\nabla g^*\|_\Psi.$$

Согласно нашему основному предположению о модуле градиента,

$$|\nabla g^*(x, y)| = \sqrt{|\nabla g(x)|^2 + |\nabla g(y)|^2} \le |\nabla g(x)| + |\nabla g(y)|$$

для μ^{2n}-почти всех (x, y), следовательно $\|g^*\|_\Psi \le 2\|g\|_\Psi$. Таким образом, для любой функции Юнга Ψ

$$\|g^*\|_\Psi \le \frac{4\sqrt{6}C_\Psi}{Is(\mu)} \|\nabla g^*\|_\Psi. \qquad (4.2.16)$$

Применяя (4.2.16) к $\Psi_\alpha = \Psi/\alpha$ при $\alpha = \mathbf{E}\Psi(g^*)$, получаем

$$\int_{M^n} \int_{M^n} \Psi(g(x) - g(y))\, d\mu^n(x)\, d\mu^n(y) \le \int_{M^n} \Psi\Big(\frac{4\sqrt{6}C_\Psi}{Is(\mu)} \, |\nabla g|\Big)\, d\mu^n.$$

С другой стороны, в силу неравенства Йенсена, левые интегралы оцениваются снизу выражением $\mathbf{E}\Psi(g - \mathbf{E}g)$. Это доказывает (4.2.9), а оно, очевидно, влечет (4.2.8). Теорема 4.2.2 доказана.

§ 4.3. Изопериметрические константы для продакт-мер в $\mathbf{R}^n$. Вероятностные меры на прямой, удовлетворяющие неравенствам типа Пуанкаре

Здесь мы рассмотрим важный частный случай в теореме 4.2.1, когда $M = \mathbf{R}$ – вещественная прямая с обычным расстоянием. Пусть μ – вероятностная мера на $\mathbf{R}$, и μ^n – соответствующая продакт-мера в $\mathbf{R}^n$. Условие (4.2.1) оказывается несущественным в этой ситуации, так как меры со свойством $Is(\mu) > 0$ могут быть представлены как липшицевы образы двустороннего показательного распределения ν. Напомним, что ν имеет плотность $f_\nu(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$, $x \in \mathbf{R}$, и удовлетворяет изопериметрическому неравенству

$$\nu^+(A) \geq \min(\nu(A), 1 - \nu(A)), \tag{4.3.1}$$

причем мы имеем равенство для любых интервалов вида $A = (-\infty, x]$, так что $Is(\nu) = 1$. В силу теоремы 4.1.1, это неравенство с точностью до множителя $\frac{1}{2\sqrt{6}}$ справедливо и в $\mathbf{R}^n$. Таким образом, изопериметрическая функция продакт-меры ν^n удовлетворяет соотношениям

$$\frac{1}{2\sqrt{6}} I_\nu \leq I_{\nu^n} \leq I_\nu \tag{4.3.2}$$

и в этом смысле почти не зависит от размерности. Такое свойство справедливо и для некоторых других мер (например, для логистического распределения). В случае гауссовской меры $\mu = \gamma_1$ вообще нет никакой зависимости от размерности: $I_{\gamma^n} = I_\gamma$. Однако, мы не можем описать все меры μ, удовлетвораюшие как и ν неравенству (4.3.2) с точностью до не зависящего от размерности множителя.

Как обычно, обозначим через $U_\mu : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ непрерывное слева неубывающее отображение, переводящее ν в μ. По отношению к

μ^n рассмотрим в $\mathbf{R}^n$ неравенство типа Пуанкаре для L^1-нормы

$$c\,\mathbf{E}|g - \mathbf{E}g| \leq \mathbf{E}|\nabla g|, \tag{4.3.3}$$

где g – произвольная суммируемая (по мере μ^n) непрерывно дифференцируемая функция на $\mathbf{R}^n$ (эквивалентно, можно рассматривать в (4.3.3) более широкий класс локально липшицевых функций, если модуль градиента понимается в смысле определения 1.4.1 для абстрактных метрических пространств). Мы докажем следующее уточнение теоремы 4.2.1, в котором неявно прослеживается определенное экстремальное свойство меры ν.

Теорема 4.3.1. Следующие утверждения эквивалентны:

1) мера μ^n удовлетворяет (4.3.3) с некоторой постоянной $c > 0$, не зависящей от размерности;

2) мера μ удовлетворяет (4.3.3) с некоторой постоянной $c > 0$;

3) существует отображение $U : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ с конечной липшицевой константой, переводящее ν в μ;

4) $Is(\mu) > 0$.

При этом (4.3.3) выполняется с постоянной $c = \frac{1}{2\sqrt{6}}\, Is(\mu)$, и кроме того, $Is(\mu^n) \geq \frac{1}{2\sqrt{6}}\, Is(\mu)$ для всех $n = 1, 2, \cdots$.

Заметим, что если μ удовлетворяет условию 3), то μ должна иметь конечный экспоненциальный момент, а если μ удовлетворяет 4), то μ должна иметь нетривиальную абсолютно непрерывную компоненту. Эти условия и, более того, само значение $Is(\mu)$, можно выразить явно в терминах функции распределения $F(x) = \mu((-\infty, x])$, $x \in \mathbf{R}$. Положим

$$a = \inf\{x : F(x) > 0\}, \quad b = \sup\{x : F(x) < 1\}.$$

Обозначим через f абсолютно непрерывную компоненту меры μ (по отношению к мере Лебега). Будем предполагать, что μ не вырождена, то есть, что $a < b$.

Теорема 4.3.2. Имеют место тождества:

$$Is(\mu) = \operatorname*{essinf}_{a<x<b} \frac{f(x)}{\min\{F(x), 1-F(x)\}}; \tag{4.3.4}$$

$$Is(\mu) = \frac{1}{\|U_\mu\|_{Lip}}. \tag{4.3.5}$$

Очевидно, правая часть (4.3.4) не зависит от выбора f. Смысл этого тождества в том, что при определении наименьшего значения $\frac{\mu^+(A)}{\min\{\mu(A), 1-\mu(A)\}}$ достаточно рассматривать только интервалы вида $A(x) = (-\infty, x]$ для всех (или эквивалентно – для почти всех по мере Лебега) $x \in \mathbf{R}$. Например, если мера μ представляет собой смесь

$$\mu_\alpha = \alpha\lambda + (1-\alpha)\mu, \quad \alpha \in [0,1],$$

где λ – равномерное распределение на $[a,b]$, а μ – произвольная сингулярная мера без атомов с носителем в $[a,b]$, сразу находим с помощью (4.3.4), что $Is(\mu_\alpha) = \frac{2\alpha}{b-a}$.

Заметим также, что $Is(\mu) = 0$, как только $\operatorname*{essinf}_{a<x<b} f(x) = 0$.

Неравенство (4.3.3) представляет собой частный случай неравенств Пуанкаре вида

$$c\,\|g - \mathbf{E}g\|_p \le \|\nabla g\|_p, \quad p \ge 1. \tag{4.3.6}$$

Классический случай – когда $p = 2$. В этом случае, как известно, если мера μ удовлетворяет (4.3.6), то этому неравенству удовлетворяет и продакт-мера μ^n, причем с той же самой постоянной. В случае $p = 1$ это не так – оптимальная постоянная $c = c_n(\mu)$ в общем случае зависит от размерности n, но все же, согласно теореме 4.3.1, она может быть оценена снизу через $c_1(\mu)$ с точностью до множителя $\frac{1}{2\sqrt{6}}$. Однако, не известно, справедливо ли такое утверждение при $p \ne 1, 2$.

Другой важный вопрос – какие меры на $\mathbf{R}^n$ удовлетворяют (4.3.6) и как оценить постоянную $c > 0$. При $p = 2$ это неравенство – глубоко изученная область, особенно, в римановой геометрии (см. Яу [231], Чавел [106], Берар [66], М.Ф.Чен [113]). Однако, уже в простейшем случае, когда мы имеем дело с одномерным неравенством

$$\lambda_1 \operatorname{Var}_\mu(g) \le \mathbf{E}_\mu |g'|^2, \tag{4.3.7}$$

где μ – вероятностная мера на прямой, и g – произвольная абсолютно непрерывная функция на $\mathbf{R}$ (или, эквивалентно,– функция класса $C^\infty(\mathbf{R})$ с компактным носителем), этот вопрос занимал внимание многих исследователей. Когда мера $\mu = \gamma_1$ – гауссовская, (4.3.7) справедливо с (оптимальной) постоянной $\lambda_1 = 1$. Согласно Бекнеру [65], этот факт был известен еще в 1930 гг. Позднее он многократно переоткрывался, в частности, в работах Нэша ([195], 1958 г.), Браскампа и Либа ([90], 1976 г.), Чернова ([115], 1981 г.). См. также Боровков и Утев [10], Чен [109], Удрэ и Каган [154]. Клаассен ([159], 1985 г.) нашел точное значение константы λ_1 для ряда негауссовских распределений и дал одно необходимое и близкое к нему достаточное условие явно в терминах меры μ, при которых выполняется (4.3.7) при некотором $\lambda_1 > 0$. В частности, (4.3.7) выполняется, если мера $\mu = \mu_{\lambda_1}$ имеет плотность $\frac{d\mu(x)}{dx} = \sqrt{\lambda_1} e^{-2\sqrt{\lambda_1}\,|x|}$, $x \in \mathbf{R}$ ($\lambda_1 > 0$ служит параметром масштаба для двустороннего показательного распределения ν). В этом случае (4.3.7) было известно ранее и отмечалось в работе Боровкова и Утева как Теорема Б: справедливо неравенство

$$\frac{1}{4c^2} \operatorname{Var}_\mu(g) \le \mathbf{E}_\mu |g'|^2, \tag{4.3.8}$$

где μ – абсолютно непрерывная вероятностная мера на прямой с функцией распределения F и плотностью f, удовлетворяющими при некотором $x_0 \in \mathbf{R}$ соотношениям

$$F(x) \le cf(x), \quad \text{при} \quad x < x_0, \tag{4.3.9}$$

$$1 - F(x) \le cf(x), \quad \text{при} \quad x \ge x_0. \tag{4.3.10}$$

В [10] также отмечено, что в несколько иной форме как неравенство типа Харди (4.3.8) было известно давно ([31], [41], [19], [34], [163]). Добавим лишь, что условия (4.3.9)–(4.3.10) могут быть немного ослаблены:

$$\min\{F(x), 1 - F(x)\} \le cf(x), \quad x \in \mathbf{R}. \tag{4.3.11}$$

Действительно, как мы знаем, для оптимальной постоянной c в этом неравенстве справедливо $c = \dfrac{1}{Is(\mu)} = \|U_\mu\|_{Lip}$, где U_μ – неубывающее отображение, переводящее ν в μ. Следовательно, частный случай (4.3.8) с $c = \dfrac{1}{4}$ для меры $\mu = \nu$ влечет (4.3.8) в общем случае при условии (4.3.11) (просто в результате применения (4.3.8), записанного для меры ν, к функциям вида $g(U_\mu)$). Для меры же ν неравенство (4.3.8) вытекает из теоремы Чигера, поскольку $Is(\nu) = 1$ (см. следствие 4.1.1).

Условию (4.3.11) удовлетворяют многие важные распределения, в частности, все вероятностные меры, сосредоточенные на некотором компактном интервале и имеющие на нем непрерывную положительную плотность. В этом случае экстремальная функция, минимизирующая выражение $\dfrac{\mathbf{E}_\mu (g')^2}{\mathrm{Var}_\mu(g)}$ является решением соответствующего уравнения Штурма–Лиувилля. В работе [112] Чен и Лу исследовали ситуацию, когда μ необязательно имеет компактный носитель, и нашли в терминах решения Штурма–Лиувилля необходимые и достаточные условия, при которых μ удовлетворяет (4.3.7). По признанию Чена (сделанному им автору летом 1996 г.), более 10 лет в рамках теории вероятностей предпринимались попытки найти какие-нибудь необходимые и (одновременно) достаточные условия, и при этом, по-видимому, незамеченной оставалась одна статья Макенхаупта [193], в которой описывались все меры на полуоси $(0, +\infty)$, удовлетворяющие родственным неравенствам типа Харди.

Приведем основной результат из [193] (мы будем его использовать позднее при описании вероятностных распределений, удовлетворяющих логарифмическим неравенставам Соболева на прямой $\mathbf{R}$). Пусть μ и λ – неотрицательные меры на полуоси $(0, +\infty)$ (для определенности будем их считать конечными). Рассмотрим оптимальную постоянную $C = C(\mu, \lambda)$ в неравенстве

$$\|g\|_{L^p(\mu)} \leq C\,\|g'\|_{L^p(\lambda)}, \tag{4.3.12}$$

где g – произвольная непрерывно дифференцируемая функция на $[0, +\infty)$, такая что $g(0) = 0$. Определим постоянную $B = B_p(\mu, \lambda)$ равенством

$$B = \sup_{x>0} \mu((x, +\infty))^{1/p} \left(\int_0^x f_\lambda(t)^{-q/p} dt \right)^{1/q}, \quad q = \frac{p}{p-1}, \tag{4.3.13}$$

где f_λ – плотность абсолютно непрерывной компоненты λ по отношению к мере Лебега. По определению, $B = 0$, если $\mu = 0$. Справедлива

Теорема 4.3.3 ([193]). Имеют место соотношения

$$B \leq C \leq p^{1/p} q^{1/q} B. \tag{4.3.14}$$

Когда меры μ и λ абсолютно непрерывны (что, в сущности не умаляет общности), эти соотношения были получены, согласно [193], Артолой, Таленти и Томаселли [59], [226], [227].

Неравенства типа Пуанкаре (4.3.6) могут быть легко сведены к частному случаю (4.3.12) для пар одинаковых мер $\lambda = \mu$. Действительно, предположим для определенности, что $m(\mu) = 0$ (где $m(\mu)$ обозначает медину меры μ). Будем рассматривать (4.3.12) также для мер на полуоси $(-\infty, 0)$ с соответствующими изменениями в определении (4.3.13). Обозначим через μ_+ и μ_- сужения μ на $(0, +\infty)$ и $(-\infty, 0)$ соответственно. В неравенстве (4.3.6), в силу его инвариантности относительно операции сдвига $g \to g + const$, можно считать, что $g(0) = 0$. Предполагая, что (4.3.12) выполняется для пар (μ_+, μ_+) и (μ_-, μ_-), получаем

$$\begin{aligned}\|g - \mathbf{E}g\|_{L^p(\mu)} &\leq 2\|g\|_{L^p(\mu)} = 2\left(\|g\|^p_{L^p(\mu_+)} + \|g\|^p_{L^p(\mu_-)}\right)^{1/p} \\ &\leq 2C\left(\|g'\|^p_{L^p(\mu_+)} + \|g'\|^p_{L^p(\mu_-)}\right)^{1/p} \leq 2C\,\|g'\|_{L^p(\mu)},\end{aligned}$$

и таким образом, (4.3.6) выполняется с $c = 1/(2C)$. При этом, $\|g - \mathbf{E}g\|_{L^2(\mu)} \leq \|g\|_{L^2(\mu)}$, следовательно можно даже взять $c = 1/C$ при $p = 2$. Обратно, выведем (4.3.12) для пары (μ_+, μ_+), исходя из (4.3.6). Доопределим $g(x) = 0$ при $x < 0$. Тогда справедливо элементарное неравенство

$$\|g\|_{L^p(\mu_+)} \leq 2\,\|g - \mathbf{E}g\|_{L^p(\mu)}. \tag{4.3.15}$$

Оценивая правую часть (4.3.15) с помощью (4.3.6), приходим к неравенству типа Харди (4.3.12) для пары (μ_+, μ_+). Аналогично получаем (4.3.12) для (μ_-, μ_-). Таким образом, с точностью до абсолютных постоянных, неравенство (4.3.6) для меры μ равносильно неравенству (4.3.12) для пар мер (μ_+, μ_+) и (μ_-, μ_-), в частности, $c > 0$ равносильно тому, что $B_p(\mu_+, \mu_+) < +\infty$ и $B_p(\mu_-, \mu_-) < +\infty$. В терминах функции распределения F и плотности f абсолютно непрерывной компоненты вероятностной меры μ с медианой $m(\mu) = 0$ эти два условия можно записать при $p = 2$ как

$$\sup_{x>0}\left[(1 - F(x))\int_0^x \frac{1}{f(t)}\,dt + F(-x)\int_{-x}^0 \frac{1}{f(t)}\,dt\right] < +\infty$$

или в терминах отображения U_μ (в предположении, что f непрерывна и положительна на (a, b)) как условие

$$\sup_{x>0} e^{-x}\int_0^x \left(U'_\mu(t)^2 + U'_\mu(-t)^2\right)dt < +\infty.$$

Легко видеть, что это условие – небольшое ослабление условия липшицевости $\|U_\mu\|_{Lip} < +\infty$, и следовательно неравенство типа Пуанкаре (4.3.6) при $p = 2$ (строго) слабее, чем такое же неравенство при $p = 1$. Заметим также, что, согласно (4.3.13), условия $B_p(\mu_+, \mu_+) < +\infty$ и $B_p(\mu_-, \mu_-) < +\infty$ при $p = 1$ примут вид

$$\operatorname*{esssup}_{x>0} \left[\frac{1 - F(x)}{f(x)} + \frac{F(-x)}{f(-x)} \right] < +\infty,$$

что, согласно (4.3.4), равносильно условию $Is(\mu) > 0$.

Приступим к доказательствам. Начнем с доказательства теоремы 4.3.2.

Доказательство теоремы 4.3.2. Положим

$$K(\mu) = \operatorname*{essinf}_{a<x<b} \frac{f(x)}{\min\{F(x), 1 - F(x)\}}.$$

Очевидно, $K(\mu) \geq Is(\mu)$. Действительно, для $x \in (a, b)$ имеем

$$\mu^+(A(x)) = \liminf_{\varepsilon \to 0^+} \frac{F(x + \varepsilon) - F(x)}{\varepsilon} \equiv f_+(x),$$

поэтому

$$Is(\mu) \leq \frac{\mu^+(A(x))}{\min\{\mu(A(x)), 1 - \mu(A(x))\}} = \frac{f_+(x)}{\min\{F(x), 1 - F(x)\}}.$$

Беря essinf правой части по интервалу $x \in (a, b)$ и замечая, что в силу теоремы Лебега о дифференцируемости F почти всюду, $f_+ = f$ почти всюду, получаем $K(\mu) \geq Is(\mu)$.

В частности, $K(\mu) = Is(\mu)$, если $K(\mu) = 0$. Поэтому для доказательства (4.3.4) будет достаточно установить противоположное неравенство, причем можно предполагать, что $K(\mu) > 0$.

Итак, предположим, что $K(\mu) > 0$. Как следствие, $f(x) > 0$ почти всюду на (a, b), и значит F строго возрастает на этом интервале. Следовательно, функция

$$F^{-1}(p) = \min\{x : F(x) \geq p\}$$

(однозначно определяемых квантилей) не убывает, непрерывна на $(0,1]$ и принимает значения в $(a,b]$. Доопределим ее на весь интервал $[0,1]$, полагая по непрерывности $F^{-1}(0)=a$.

Введем функцию распределения F_ν меры ν. Обозначим через $F_\nu^{-1}:[0,1]\to[-\infty,+\infty]$ обратную к ней, и рассмотрим функцию

$$V(x)=F_\nu^{-1}(F(x)),\quad x\in\mathbf{R}.$$

Напомним, что отображение U_μ определятся однозначо и может быть записано явно в виде

$$U_\mu(x)=F^{-1}(F_\nu(x)),\quad x\in\mathbf{R}.$$

Заметим, что для всех $t,x\in\mathbf{R}$ неравенства $U_\mu(t)\le x$ и $t\le V(x)$ эквивалентны, поэтому $U_\mu(V(x))=x$ для всех $x\in\mathbf{R}$. Кроме того, $U_\mu=x$ на интервалах $(V(x^-),V(x))$, причем $U_\mu=a$ на $(-\infty,V(a)]$ и $U_\mu=b$ на $[V(b),+\infty)$.

Покажем, что

$$\frac{1}{\|U_\mu\|_{Lip}}\ge K(\mu). \tag{4.3.16}$$

Функция F дифференцируема почти всюду, причем $F'(x)=f(x)$ для почти всех $x\in(a,b)$. Поэтому, дифференцируя V и пользуясь тождеством $f_\nu(F_\nu^{-1}(p))=\min\{p,1-p\}$, получаем

$$V'(x)\ge\frac{f(x)}{\min\{F(x),1-F(x)\}}\ge K(\mu)$$

для почти всех $x\in(a,b)$. Следовательно, для всех $a\le x<y\le b$,

$$V(y)-V(x)\ge\int_x^y V'(t)\,dt\ge K(\mu)(y-x).$$

Положим $Im(F)=\{F(x)>0:x\in\mathbf{R}\}$. Для всех $p\in Im(F)$, очевидно, $F(F^{-1}(p))=p$, поэтому $V(U(x))=x$, как только $F_\nu(x)\in Im(F)$. Поскольку U_μ принимает значения в $[a,b]$, заключаем, что для всех $x<y$

$$y-x=V(U(y))-V(U(x))\ge K(\mu)(U(y)-U(x))$$

при условии, что $F_\nu(x), F_\nu(y) \in Im(F)$. Но, как легко видеть, это условие может быть снято, поскольку функция F^{-1} непрерывна (в силу строгого возрастания F) и постоянна на интервалах вида $[F(z^-), F(z)]$. Таким образом, (4.3.16) доказано.

Далее, мы знаем (см. (4.1.13) или, более общо, теорему 4.1.1), что случайная величина ξ, имеющая распределение ν, удовлетворяет аналитическому неравенству

$$\mathbf{E}|g(\xi)| \le \mathbf{E}|g'(\xi)|, \tag{4.3.17}$$

где g – произвольная локально липшицевая функция на прямой, такая что $m(g(\xi)) = 0$. При этом, мы придерживаемся определения 1.4.1: $|g'(x)| = \limsup_{y\to x, y\neq x} \dfrac{|g(y)-g(x)|}{|y-x|}$. Пусть $\eta = U_\mu(\xi)$, и применим (4.3.17) к функциям вида $g = w(U_\mu)$ (w – локально липшицевая): так как $|g'(\xi)| \le \|U_\mu\|_{Lip} |w'(U_\mu(\xi))|$, получаем

$$\frac{1}{\|U_\mu\|_{Lip}} \mathbf{E}|w(\eta)| \le \mathbf{E}|w'(\eta)|. \tag{4.3.18}$$

Следовательно, в силу (4.3.16),

$$K(\mu)\, \mathbf{E}|w(\eta)| \le \mathbf{E}|w'(\eta)| \tag{4.3.19}$$

для всех локально липшицевых функций w, таких что $m(w(\eta)) = 0$. Так как η имеет распределение μ, и так как оптимальная постоянная в (4.3.19) перед $\mathbf{E}|w(\eta)|$ равна $Is(\mu)$, приходим к оценке $Is(\mu) \ge K(\mu)$. Таким образом,

$$K(\mu) = Is(\mu). \tag{4.3.20}$$

Аналогично из (4.3.18) получаем, что

$$\frac{1}{\|U_\mu\|_{Lip}} \le Is(\mu). \tag{4.3.21}$$

С учетом (4.3.16) и (4.3.20), это дает

$$\frac{1}{\|U_\mu\|_{Lip}} = Is(\mu), \tag{4.3.22}$$

то есть (4.3.5). Остается доказать (4.3.22) в случае, когда $K(\mu) = Is(\mu) = 0$. Предполагая противное $\|U_\mu\|_{Lip} < +\infty$ и повторяя переход от (4.3.17) к (4.3.18), мы бы получили (4.3.21), то есть, $Is(\mu) > 0$. Теорема 4.3.2 доказана.

Доказательство теоремы 4.3.1.

Переход (4.3.17) $\Rightarrow$ (4.3.18) $\Rightarrow$ (4.3.21) имеет силу для всех липшицевых отображений U, переводящих ν в μ, и поэтому 3) $\Rightarrow$ 4) уже доказано. Следовательно, в силу теоремы 4.3.2, свойства 2), 3) и 4) эквивалентны. Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) тоже не требует доказательств. Докажем оставшиеся утверждения.

Можно предполагать, что $Is(\mu) > 0$, то есть, $\|U_\mu\|_{Lip} < +\infty$. Пусть $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ – случайный вектор с распределением ν^n, так что случайный вектор $\eta = (U_\mu(\xi_1), \ldots, U_\mu(\xi_n))$ имеет распределение μ^n. В силу теоремы 4.2.1, поскольку $Is(\nu) = 1$, имеем $Is(\nu^n) \geq \frac{1}{2\sqrt{6}}$, поэтому (см. (4.1.13)) ν^n удовлетворяет аналитическому неравенству

$$\frac{1}{2\sqrt{6}}\,\mathbf{E}|g(\xi)| \leq \mathbf{E}|\nabla g(\xi)|, \tag{4.3.23}$$

где g – произвольная локально липшицевая функция на $\mathbf{R}^n$, такая что $m(g(\xi)) = 0$. Применяя (4.3.23) к функциям вида $g = w(U_\mu)$ и замечая, что

$$|\nabla g(\xi)| \leq \|U_\mu\|_{Lip} |\nabla w(U_\mu(\xi))| = \frac{1}{Is(\mu)}\,|\nabla w(\eta)|,$$

получаем

$$\frac{Is(\mu)}{2\sqrt{6}}\,\mathbf{E}|w(\eta)| \leq \mathbf{E}|\nabla w(\eta)|, \tag{4.3.24}$$

где w – произвольная локально липшицевая функция на $\mathbf{R}^n$, такая что $m(w(\eta)) = 0$. Аппроксимируя в (4.3.24), как обычно, индикаторные функции локально липшицевыми (лемма 1.4.1), приходим к изопериметрическому неравенству

$$(\mu^n)^+(A) \geq \frac{Is(\mu)}{2\sqrt{6}}\,\min(\mu^n(A), 1 - \mu^n(A)), \quad A \subset \mathbf{R}^n,$$

что и означает, что $Is(\mu^n) \geq \frac{Is(\mu)}{2\sqrt{6}}$.

Теперь воспользуемся неравенством (4.2.20), полученным при доказательстве теоремы 4.2.1:

$$(\mu^n)^+(A) \geq \frac{Is(\mu)}{\sqrt{6}}\,\mu^n(A)(1-\mu^n(A)), \quad A \subset \mathbf{R}^n.$$

Как мы знаем, это изопериметрическое неравенство эквивалентно аналитическому неравенству

$$\frac{1}{2\sqrt{6}}\,\mathbf{E}|w(\eta)-\mathbf{E}w(\eta)| \leq \mathbf{E}|\nabla w(\eta)|.$$

Это доказывает многомерный вариант (4.3.3). Теорема 4.3.1 доказана.

§ 4.4. Неравенства типа Пуанкаре в классе выпуклых функций

Для продакт мер μ^n в $\mathbf{R}^n$ здесь мы рассмотрим ослабленный вариант неравенств типа Пуанкаре для L^2-нормы

$$\mathrm{Var}_{\mu^n}(g) \leq C\,\mathbf{E}_{\mu^n}|\nabla g|^2, \tag{4.4.1}$$

когда требуется, чтобы это неравенство выполнялось не для всех (локально липшицевых), а лишь для выпуклых функций g на $\mathbf{R}^n$. Как и в классе всех функций, "одномерное" неравенство (4.4.1) распространяется на пространство $(\mathbf{R}^n, \mu^n)$ в классе всех выпуклых функций на $\mathbf{R}^n$ без изменения постоянной C. Поэтому в (4.4.1) достаточно рассматривать случай $n = 1$.

Как следствие многомерного варианта (4.4.1), получаем, что дисперсии всех выпуклых функций g на $\mathbf{R}^n$, таких что $\|g\|_{Lip} \leq 1$, ограничены постоянной, не зависящей от размерности. Эквивалентно, если $(\zeta_n)_{n\geq 1}$ – последовательность независимых случайных величин, имеющих распределение μ, то $\mathrm{Var}(\zeta_1) < +\infty$, и для любого ограниченного (п.н.) случайного процесса $(x_t)_{t\in T}$, линейно порожденного величинами ξ_n, т.е., представимого в виде суммы п.н. сходящегося функционального ряда

$$x_t = a_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\zeta_n, \quad t \in T,$$

мы имеем

$$\mathrm{Var}(\sup_t x_t) \leq C\,\sup_t(\mathrm{Var}(x_t)). \tag{4.4.2}$$

Естественный вопрос: какие меры μ на прямой удовлетворяют свойству (4.4.2) или формально более сильному неравенству (4.4.1) (для класса всех выпуклых функций)? Такими будут, например, все меры с компактным носителем. Действительно, для любой выпуклой дифференцируемой функции g на $\mathbf{R}$ справедливо неравенство

$$|g(x)-g(y)|^2 \le \left(|g'(x)|^2+|g'(y)|^2\right)(x-y)^2, \quad x,y\in\mathbf{R}.$$

Следовательно, если $\mu([a,b])=1$, то

$$\mathrm{Var}_\mu(g)=\frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b|g(x)-g(y)|^2d\mu(x)d\mu(y) \le (b-a)^2\int_a^b|g'(x)|^2d\mu(x).$$

Заметим, что компактность носителя не является достаточным условием для выполнения (4.4.1) в классе всех функций: мера μ с плотностью $f(x)=|x|$, $|x|<1$, дает контрпример, как следует из теоремы 4.3.3. Двустороннее показательное распределение ν и следовательно все липшицевы образы ν (то есть, все меры μ со свойством $Is(\mu)>0$), удовлетворяют (4.4.1) для всех g и значит для всех выпуклых g. Условие $Is(\mu)>0$ почти необходимо. Ниже даются необходимые и достаточные условия для (4.4.1)–(4.4.2) (как ни странно, эти два свойства эквивалентны).

Пусть μ – вероятностная мера на $\mathbf{R}$ с функцией распределения $F(x)=\mu((-\infty,x])$, $x\in\mathbf{R}$. Как обычно, через U_μ мы обозначаем неубывающее, непрерывное слева отображение, переводящее меру ν в μ.

Теорема 4.4.1. Следующие условия эквивалентны:

a) существует постоянная C, такая что для всех дифференцируемых выпуклых функций g на $\mathbf{R}$

$$\mathrm{Var}_\mu(g)\le C\,\mathbf{E}_\mu|g'|^2; \tag{4.4.3}$$

b) существует постоянная C, такая что для всех выпуклых функций g на $\mathbf{R}^n$ с условием $\|g\|_{Lip}\le 1$

$$\mathrm{Var}_{\mu^n}(g)\le C; \tag{4.4.4}$$

c) существуют постоянные C и $h > 0$, такие что для всех $x \in \mathbf{R}$,

$$F(x)(1 - F(x)) \leq C\,(F(x) - F(x-h)); \tag{4.4.5}$$

d) для некоторого (эквивалентно – для всех) $h > 0$,

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} [U_\mu(x+h) - U_\mu(x)] < +\infty. \tag{4.4.6}$$

Заметим, что с последним свойством, то есть, тем фактом, что U_μ порождает конечный (аддитивный) модуль, мы уже встречались в главе 2 при описании свойства концентрации продакт-мер μ^n по отношению к равномерному расстоянию в $\mathbf{R}^n$. Таким образом, все эти условия $a) - d)$ эквивалентны условиям a) и b) из теоремы 2.7.2, а также условиям $c_1) - c_2)$ из теоремы 2.7.3 (рассматриваемых одновременно):

$$\sup_n \mathrm{Var}(\max(\zeta_1, \dots, \zeta_n)) < +\infty; \tag{4.4.7}$$

$$\sup_n \mathrm{Var}(\min(\zeta_1, \dots, \zeta_n)) < +\infty. \tag{4.4.8}$$

Следовательно, выпуклые функции вида $g(x) = \max\{x_1, \dots, x_n\}$ и $g(x) = \max\{-x_1, \dots, -x_n\}$ являются в некотором (асимптотическом) смысле почти экстремальными в (4.4.1).

Сделаем еще несколько замечаний. Оказывается, для широкого класса распределений μ на прямой неравенства типа Пуанкаре (4.4.3) могут быть обращены в том смысле, что для всех дифференцируемых выпуклых функций g на $\mathbf{R}$ выполняется неравенство

$$\mathrm{Var}_\mu(g) \geq c\,\mathbf{E}_\mu |g'|^2, \tag{4.4.9}$$

где $c > 0$ не зависит от g. Мы опишем один класс таких распределений. Тестируя (4.4.9) на функциях вида $g(x) = (x-a)^+$ и $g(x) = (a-x)^+$, легко видеть, что если невырожденная мера μ

удовлетворяет (4.4.9), то она должна иметь достаточно "тяжелые хвосты", по крайней мере, $F(x)(1-F(x)) \geq c_1 e^{-c_2|x|}$ для некоторых $c_1, c_2 > 0$ и всех $x \in \mathbf{R}$. В частности, гауссовская мера не удовлетворяет (4.4.9).

Предположим, что $0 < F(a) < 1$ для всех $a \in \mathbf{R}$ (что необходимо для (4.4.9)), и определим условные ограничения меры μ на полуоси $(-\infty, a]$ и $[a, +\infty)$ – вероятностные меры

$$\mu_a^-(A) = \frac{\mu(A \cap (-\infty, a])}{\mu((-\infty, a])}, \quad \mu_a^+(A) = \frac{\mu(A \cap [a, +\infty))}{\mu([a, +\infty))}, \quad A \subset \mathbf{R}.$$

Обозначим через $\mathrm{Var}(\mu)$ дисперсию функции $i(x) = x$ по отношению к мере μ.

Теорема 4.4.2. Предположим, что $\mathrm{Var}(\mu) < +\infty$. Определим

$$\sigma^2(\mu) = \inf_{a \in \mathbf{R}} \min\{\mathrm{Var}(\mu_a^-), \mathrm{Var}(\mu_a^+)\}.$$

Тогда неравенство (4.4.9) справедливо для всех дифференцируемых выпуклых функций g на $\mathbf{R}$ с постоянной $c = \sigma^2(\mu)$.

Приведем один пример.

Теорема 4.4.3. В классе всех дифференцируемых выпуклых функций g на $\mathbf{R}$ по отношению к двустороннему показательному распределению ν справедливы неравенства

$$\mathbf{E}_\nu |g'|^2 \leq \mathrm{Var}_\nu(g) \leq 4\, \mathbf{E}_\nu |g'|^2. \tag{4.4.10}$$

Правое неравенство в (4.4.10) хорошо известно и имеет силу для всех абсолютно непрерывных функций g. Асимптотически экстремальными в нем служат функции $g(x) = e^{tx}$ при $t \to \frac{1}{2}$. Левая часть (4.1.10) превращается в равенство на функции $g(x) = |x|$.

Наконец отметим, что в классе всех дифференцируемых функций g (4.4.9) не может выполняться, если мера μ не вырождена.

Не может выполняться и многомерный вариант (4.4.9) в классе всех выпуклых дифференцируемых функций g на $\mathbf{R}^n$, если требовать, чтобы постоянная c не зависела от размерности n. Действительно, если бы выполнялось неравенство

$$\mathrm{Var}_{\mu^n}(g) \geq c\,\mathbf{E}_{\mu^n}|\nabla g|^2$$

для продакт-мер, причем, не умаляя общности, мера μ имела бы нулевое среднее, то применяя его к функциям вида $g_n(x) = g\big(\frac{x_1+\cdots+x_n}{\sqrt{n}}\big)$, $x \in \mathbf{R}^n$, мы бы получили, в силу центральной предельной теоремы, одномерное неравенство (4.4.9) для гауссовской меры (что, как уже отмечалось, невозможно).

Перейдем к доказательствам. Напомним, что в неравенствах (4.4.3) и (4.4.9) условие дифференцируемости для выпуклых функций g может быть снято, и тогда в соответствии с общим определением 1.4.1 под выражением $|g'(x)|$ мы понимаем значение $\max\{|g'(x^-)|, |g'(x^+)|\}$.

Доказательство теоремы 4.4.1. Рассмотрим еще одно условие:

e) существуют постоянные C и $h > 0$, такие что для всех неубывающих функций g на $\mathbf{R}$

$$\mathrm{Var}_\mu(g(x)) \leq C\,\mathbf{E}_\mu|g(x+h) - g(x)|^2. \tag{4.4.11}$$

Доказательство проведем по двум циклам $e) \Rightarrow c) \Rightarrow d) \Rightarrow e)$ и $d) \Rightarrow a) \Rightarrow b) \Rightarrow d)$.

$e) \Rightarrow c)$: применяя (4.4.11) к индикаторным функциям $g = 1_{(x,+\infty)}$, приходим к (4.4.5).

$c) \Rightarrow d)$ представляет собой утверждение леммы 3.6.2: нужно положить $c = 1/C$ и $h_0 = h$, и мы получим, согласно (3.6.8),

$$U_\mu\Big(x + \log\big(1 + \frac{1}{2C}\big)\Big) - U_\mu(x) \leq h, \quad x \in \mathbf{R},$$

то есть (4.4.6) с $h = \log\big(1 + \frac{1}{2C}\big)$.

$d) \Rightarrow e)$: применим неравенство леммы 3.6.5 при $a = 1$ и $b = 0$:

$$\mathrm{Var}_\nu(g(x)) \le C\,\mathbf{E}_\nu |g(x+1) - g(x)|^2.$$

Подставляя в это неравенство функции вида $g(U_\mu)$, приходим к (4.4.11) с $h = \sup_{x\in\mathbf{R}} [U_\mu(x+1) - U_\mu(x)]$.

$d) \Rightarrow a)$: сначала предположим, что в дополнение к выпуклости g не убывает. Снова применим неравенство леммы 3.6.5, но теперь при $a = -1$ и $b = 0$:

$$\mathrm{Var}_\nu(g(x)) \le C\,\mathbf{E}_\nu |g(x) - g(x-1)|^2.$$

Это неравенство имеет силу для любой неубывающей функции g на $\mathbf{R}$ и, в частности, для функции $g(U_\mu)$. Как следствие,

$$\mathrm{Var}_\mu(g(y)) \le \ C\,\mathbf{E}_\mu |g(y) - g(y-h)|^2, \tag{4.4.12}$$

где h было определено на предыдущем шаге. Так как g выпуклая и неубывающая, имеем $0 \le g(y) - g(y-h) \le hg'(y)$, и следовательно (4.4.12) влечет (4.4.3) с постоянной Ch^2. Аналогично рассматривается случай, когда g – невозрастающая.

Рассмотрим третий возможный случай: g не возрастает на интервале $(-\infty, a]$ и не убывает на интервале $[a, +\infty)$. Не умаляя общности, можно считать, что $g(a) = 0$ и что g суммируема с квадратом по мере μ. Тогда, как уже доказано, (4.4.3) справедливо для (выпуклых монотонных) функций $g_0 = g\,1_{[a,+\infty)}$ и $g_1 = g\,1_{(-\infty,a]}$. Записывая $a_0 = \mathbf{E}_\mu g_0$, $a_1 = \mathbf{E}_\mu g_1$ и замечая, что $g = g_0 + g_1$, получаем:

$$\begin{aligned}\sqrt{\mathrm{Var}_\mu(g)} = \|g - \mathbf{E}_\mu g\|_2 &\le \|g_0 - a_0\|_2 + \|g_1 - a_1\|_2 \\ &\le \sqrt{C}\,h\,\|g_0'\|_2 + \sqrt{C}\,h\,\|g_1'\|_2 \le \sqrt{2C}\,h\,\|g'\|_2,\end{aligned}$$

где $\|\cdot\|_2$ обозначает норму в пространстве $L^2(\mu)$. На последнем шаге мы применили неравенство $\sqrt{u_0} + \sqrt{u_1} \le \sqrt{2(u_0+u_1)}$ при

$u_0 = \mathbf{E}_\mu|g_0'|^2$ и $u_1 = \mathbf{E}_\mu|g_1'|^2$. Таким образом, (4.4.3) доказано и в общем случае с постоянной $2Ch^2$.

$a) \Rightarrow b)$ уже отмечалось.

$b) \Rightarrow d)$: см. теорему 2.7.2 и 2.7.3.

Теорема 4.4.1 доказана.

Для доказательства теоремы 4.4.2 нам потребуется

Лемма 4.4.1. Предположим, что случайная величина ζ имеет конечный второй момент. Пусть $c > 0$. Следующие утверждения эквивалентны:

$a)$ $\mathrm{Cov}(f(\zeta), g(\zeta)) \geq c\,\mathbf{E}f'(\zeta)g'(\zeta)$ для всех неубывающих дифференцируемых выпуклых функций f и g, таких что $f(\zeta)$ и $g(\zeta)$ имеют конечный второй момент;

$b)$ $\mathrm{Var}(g(\zeta)) \geq c\,\mathbf{E}g'(\zeta)^2$ для любой неубывающей дифференцируемой выпуклой функции g;

$c)$ $\mathrm{Var}\big((\zeta - a)^+\big) \geq c\,\mathbf{P}\{\zeta \geq a\}$ для всех $a \in \mathbf{R}$.

Доказательство. Очевидно, $a) \Rightarrow b)$. Заметим, что $b)$ имеет смысл и в случае $\mathrm{Var}(g(\zeta)) = \infty$. Кроме того, как в $a)$, так и в $b)$, условие дифференцируемости можно легко снять, если $g'(x)$ заменить на $g'(x^+)$. При таком соглашении неравенство в $b)$ превращается в неравенство в $c)$ на функциях $g_a(x) = (x-a)^+$. Следовательно $b) \Rightarrow c)$.

Чтобы вывести $a)$ из $c)$, можно предполагать, что функция распределения F с.в. ζ непрерывна, и что $f(-\infty) = g(-\infty) = 0$. Тогда f и g могут быть представлены в виде смеси $\int g_a\,d\pi(a)$ функций вида g_a (мера π неотрицательна), и так как неравенство в $a)$ линейно по f и g, достаточно его доказывать, когда $f = g_a$, $g = g_b$, считая $a, b \in \mathbf{R}$ произвольными. Не умаляя общности, пусть $a \leq b$. Интегрируя по частям, имеем:

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Cov}(g_a(\zeta), g_b(\zeta))\\
&= \int_b^{+\infty}(x-a)(x-b)dF(x) - \int_a^{+\infty}(x-a)dF(x)\int_b^{+\infty}(x-b)dF(x)\\
&= \int_b^{+\infty}(2x-a-b)(1-F(x))dx - \int_a^{+\infty}(1-F(x))dx\int_b^{+\infty}(1-F(x))dx.
\end{aligned}
$$

Следовательно

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{da}\operatorname{Cov}(g_a(\zeta), g_b(\zeta)) =\\
&-\int_a^{+\infty}(1-F(x))dx + (1-F(a))\int_b^{+\infty}(1-F(x))dx \le 0,
\end{aligned}
$$

то есть, $\operatorname{Cov}(g_a(\zeta), g_b(\zeta))$ не возрастает по $a \in (\infty, b]$, в то время как правая часть неравенства в a) $c\mathbf{E}g_a'(\zeta)g_b'(\zeta) = c(1-F(b))$ не зависит от a. Следовательно, неравенство в a) становится более сильным при $a = b$. Лемма 4.4.1 доказана.

Доказательство теоремы 4.4.2. Можно считать, что $\operatorname{Var}_\mu(g) < +\infty$, и что g достигает свое наименьшее значение в некоторой точке $a \in \mathbf{R}$. Можно также предполагать, что функция распределения F меры μ непрерывна. Воспользуемся абстрактным тождеством

$$
\operatorname{Var}_{p\nu+(1-p)\lambda}(g) = p\operatorname{Var}_\nu(g) + (1-p)_\lambda\operatorname{Var}(g) + p(1-p)|\mathbf{E}_\nu g - \mathbf{E}_\lambda g|^2
$$

(где ν и λ – произвольные вероятностные меры, $p \in [0,1]$) при $\nu = \mu_a^-$, $\lambda = \mu_a^+$ и $p = F(a)$. Мы получим:

$$
\operatorname{Var}_\mu(g) \ge F(a)\operatorname{Var}_{\mu_a^-}(g) + (1-F(a))\operatorname{Var}_{\mu_a^+}(g). \tag{4.4.13}
$$

Так как g не возрастает на $(-\infty, a]$ и не убывает на $[a, +\infty)$, в силу леммы 4.4.1, примененной к (g, μ_a^+) и (g, μ_a^-), имеем

$$
\operatorname{Var}_{\mu_a^+}(g) \ge c^+(a)\int g'(x)^2\,d\mu_a^+(x), \tag{4.4.14}
$$

$$\operatorname{Var}_{\mu_a^-}(g) \geq c^-(a) \int g'(x)^2 \, d\mu_a^-(x) \tag{4.4.15}$$

с постоянными

$$c^+(a) = \inf_{b \geq a} \frac{\operatorname{Var}_{\mu_a^+}\big((x-b)^+\big)}{\mu_a^+([b,+\infty))}, \quad c^-(a) = \inf_{b \leq a} \frac{\operatorname{Var}_{\mu_a^-}\big((b-x)^+\big)}{\mu_a^-((-\infty,b])}.$$

Но при $b \geq a$

$$\begin{aligned}
&\frac{\operatorname{Var}_{\mu_a^+}\big((x-b)^+\big)}{\mu_a^+([b,+\infty))} \\
&= \frac{1-F(a)}{1-F(b)} \left[\frac{1}{1-F(a)} \int_b^{+\infty} (x-b)^2 dF(x) - \left(\frac{1}{1-F(a)} \int_b^{+\infty} (x-b) dF(x) \right)^2 \right] \\
&= \frac{1}{1-F(b)} \int_b^{+\infty} (x-b)^2 dF(x) - \frac{1}{(1-F(a))(1-F(b))} \left(\int_b^{+\infty} (x-b) dF(x) \right)^2 \\
&\geq \frac{1}{1-F(b)} \int_b^{+\infty} (x-b)^2 dF(x) - \left(\frac{1}{1-F(b)} \int_b^{+\infty} (x-b) dF(x) \right)^2 \\
&= \operatorname{Var}_{\mu_b^+}\big((x-b)^+\big) = \operatorname{Var}(\mu_b^+),
\end{aligned}$$

так как $1-F(a) \geq 1-F(b)$ и $(x-b)^+ = x-b$ для μ_b^+-почти всех $x \in \mathbf{R}$. Таким образом,

$$c^+(a) \geq \inf_{b \geq a} \operatorname{Var}(\mu_b^+) \geq \sigma^2(\mu).$$

Аналогично получаем оценку $c^-(a) \geq \sigma^2(\mu)$. Используя эти оценки соответственно в (4.4.14) и (4.4.15) и применяя эти неравенства к (4.4.13), приходим к (4.4.9). Теорема 4.4.2 доказана.

Доказательство теоремы 4.4.3. Требуется установить лишь первое неравенство в (4.4.10). В силу симметричности меры ν относительно 0, $\operatorname{Var}(\nu_a^-) = \operatorname{Var}(\nu_{-a}^+)$, и согласно теореме 4.4.2, достаточно показать, что $\operatorname{Var}(\nu_a^+) \geq 1$ для всех $a \in \mathbf{R}$. Напомним, что $\dfrac{d\nu(x)}{dx} = \dfrac{1}{2} \exp(-|x|)$, $x \in \mathbf{R}$. Если $a \geq 0$, то с точностью до сдвига ν_a^+ – односторонне показательное распределение, так что $\operatorname{Var}(\nu_a^+) = 1$.

Рассмотрим случай $a \le 0$. Чтобы произвести соответствующие вычисления, нам удобнее будет работать с функцией распределения $F_a(x) = \nu_a^+((a, a+x])$, то есть, как мера, F_a – просто сдвиг ν_a^+, и значит $\mathrm{Var}(\nu_a^+) = \mathrm{Var}(F_a)$. Очевидно, F_a сосредоточена на полуоси $[0, +\infty)$ и имеет там плотность $\dfrac{e^{-|a+x|}}{2-e^a}$, $x \ge 0$. Используя элементарные тождества

$$\int xe^x dx = (x-1)e^x, \quad \int xe^{-x} dx = -(x+1)e^{-x},$$

$$\int x^2e^x dx = (x^2-2x+2)e^x, \quad \int x^2e^{-x} dx = -(x^2+2x+2)e^{-x},$$

находим:

$$(2-e^a)\int_0^{-a} x dF_a(x) = \int_0^{-a} xe^{(a+x)} dx = -(a+1) + e^a,$$

$$(2-e^a)\int_{-a}^{\infty} x dF_a(x) = \int_{-a}^{\infty} xe^{-(a+x)} dx = 1-a.$$

Таким образом, $\int_0^\infty x dF_a(x) = \dfrac{-2a+e^a}{2-e^a}$. Далее,

$$(2-e^a)\int_0^{-a} x^2 dF_a(x) = (a^2+2a+2) - 2e^a,$$

$$(2-e^a)\int_{-a}^{\infty} x^2 dF_a(x) = a^2-2a+2.$$

Следовательно, $\int_0^\infty x^2 dF_a(x) = \dfrac{2a^2+4+e^a}{2-e^a}$, и

$$\mathrm{Var}(F_a) = \frac{2a^2+4+e^a}{2-e^a} - \left(\frac{-2a+e^a}{2-e^a}\right)^2 = \frac{e^{2a}-2a^2e^a+4ae^a-8e^a+8}{(2-e^a)^2}.$$

Очевидно, $\mathrm{Var}(F_a) \to 2 = \mathrm{Var}(\nu)$ при $a \to -\infty$, и $\mathrm{Var}(F_0) = 1$. Наконец,

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(F_a) \ge 1 &\iff e^{2a}-2a^2e^a+4ae^a-8e^a+8 \ge (2-e^a)^2 \\ &\iff (a^2-2a+2)e^a \le 2 \\ &\iff t^2+2t+2 \le 2e^t = 2(1+t+\frac{1}{2}t^2+\cdots),\end{aligned}$$

где $t = -a$. Последнее неравенство очевидно, так как $t \ge 0$. Теорема 4.3.3 доказана.

§ 4.5. О распределении липшицевых функционалов на вероятностных метрических пространствах, подчиняющихся неравенствам типа Пуанкаре

Пусть (M, ρ, μ) – метрическое пространство с вероятностной мерой, подчиняющееся неравенству типа Пуанкаре

$$\lambda_1 \operatorname{Var}(g) \le \mathbf{E}|\nabla g|^2, \tag{4.5.1}$$

где g – произвольная функция на M, имеющая конечную липшицеву константу на всех шарах в M, и $\lambda_1 > 0$ не зависит от g (математическое ожидание и дисперсия понимаются в смысле меры μ). Что тогда можно сказать о распределении липшицевых функций на M?

Заметим, что если бы удалось на основе (4.5.1) получить какие-либо соотношения между распределениями g и $|\nabla g|$ для функций g на (M, ρ, μ), то такие же соотношения были бы справедливы и для функций g на (M^n, ρ_2, μ^n) по отношению к продакт-мере μ^n и метрике

$$\rho_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \rho(x_i, y_i)^2}, \quad x, y \in M^n.$$

Действительно, (4.5.1) распространяется на многомерные пространства (M^n, ρ_2, μ^n) с той же самой постоянной λ_1 для оператора

$$|\nabla g|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\nabla_{x_i} g|^2, \tag{4.5.2}$$

где $|\nabla_{x_i} g|$ обозначает модуль градиента функции $x_i \to g(x)$ (напомним, что при рассмотрении многомерных аналитических неравенств в (M^n, ρ_2, μ^n) мы предполагаем, что M сепарабельно, и что соотношение (4.5.2) выполняется для всех ρ_2-липшицевых функций на M^n для μ^n-почти всех $x \in M^n$). Таким образом, (4.5.1) может служить инструментом при исследовании многомерных задач. Мы докажем следуюшие два утверждения.

Теорема 4.5.1. Предположим, что (M, ρ, μ) подчиняется неравенству типа Пуанкаре (4.5.1). Тогда все липшицевы функции на M имеют конечный экспоненциальный момент. Более того, для всех g на M, таких что $\|g\|_{Lip} \leq 1$ и $\mathbf{E}g = 0$, и всех $t \in [0, 1)$

$$\mathbf{E}e^{2\sqrt{\lambda_1}tg} \leq \frac{1+t}{1-t}, \tag{4.5.3}$$

$$\lambda_1 \mathbf{E}g^2 e^{2\sqrt{\lambda_1}tg} \leq \left(\frac{1+t}{1-t}\right)^2 \mathbf{E}|\nabla g|^2 e^{2\sqrt{\lambda_1}tg}. \tag{4.5.4}$$

Теорема 4.5.2. При тех же предположениях, для всех функций g на M, таких что $\|g\|_{Lip} \leq 1$ и $\mathbf{E}g = 0$, а также для всех непустых измеримых множеств $A \subset M$ и всех $h \geq 0$,

$$\mu\{|g| \geq h\} \leq 6\, e^{-2\sqrt{\lambda_1}\, h}, \tag{4.5.5}$$

$$1 - \mu(A^h) \leq \frac{9}{\mu(A)}\, e^{-2\sqrt{\lambda_1}\, h}. \tag{4.5.6}$$

Очевидно, последние два неравенства эквивалентны друг другу с точностью до абсолютных множителей. С точностью до абсолютных множителей они влекут (4.5.3), и в этом смысле они более сильные. Если же исходить из (4.5.3), то (4.5.5) получить нельзя даже с точностью до некоторого множителя, хотя и можно получить немного более слабую оценку: по неравенству Чебышева для всех $t \in [0, 1)$ и $h > 0$

$$\begin{aligned}\mu\big\{x \in M : |g(x)| \geq h\big\} &\leq (\mathbf{E}e^{2\sqrt{\lambda_1}tg} + \mathbf{E}e^{-2\sqrt{\lambda_1}tg})\, e^{-2\sqrt{\lambda_1}th} \\ &\leq 2\,\frac{1+t}{1-t}\, e^{-2\sqrt{\lambda_1}th} \leq \frac{4}{1-t}\, e^{-2\sqrt{\lambda_1}th},\end{aligned}$$

и оптимизируя по t ($t = 1 - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_1}h}$, $h \geq \frac{1}{2\sqrt{\lambda_1}}$), приходим к неравенству

$$\mu\big\{x \in M : |g(x)| \geq h\big\} \leq 8e\sqrt{\lambda_1}\, h\, e^{-2\sqrt{\lambda_1}\, h}.$$

Заметим также, что при $t = 0$ (4.5.4) возвращает нас к исходному неравенству (4.5.1), и значит (4.5.4) – наиболее сильное утверждение в теоремах 4.5.1 и 4.5.2 (это неравенство использовалось в [83] при оценивании энтропии).

Насколько точны неравенства (4.5.3)–(4.5.6) показывает пример вероятностного распределения $\mu = \mu_{\lambda_1}$ на прямой $M = \mathbf{R}$ (с обычной метрикой) с плотностью $\frac{d\mu(x)}{dx} = \sqrt{\lambda_1} e^{-2\sqrt{\lambda_1}\,|x|}$, $x \in \mathbf{R}$ ($\lambda_1 > 0$ – параметр). Как уже отмечалось, эта мера подчиняется неравенству (4.5.1) с постоянной λ_1. Протестируем (4.5.3)–(4.5.6) на функции $g(x) = x$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} e^{2\sqrt{\lambda_1}tg} &= \frac{1}{1-t^2} \geq \frac{1}{4}\,\frac{1+t}{1-t}, \\ \lambda_1 \mathbf{E} g^2 e^{2\sqrt{\lambda_1}tg} &= \frac{1+3t^2}{2(1-t^2)} \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^2 \mathbf{E}|\nabla g|^2 e^{2\sqrt{\lambda_1}tg}, \\ \mu\big\{\,|g| \geq h\,\big\} &= e^{-2\sqrt{\lambda_1}\,h}. \end{aligned}$$

Таким образом, (4.5.3)–(4.5.5) с точностью до абсолютных множителей неулучшаемы. Чтобы оценить (4.5.6), рассмотрим интервалы вида $A = (-\infty, a]$, предполагая, что $\frac{1}{2}\,e^{-2\sqrt{\lambda_1}\,h} \leq \mu(A)$ (то есть, нас интересуют большие значения h). Имеем:

$$1 - \mu(A^h) \geq \frac{1}{4\,\mu(A)}\, e^{-2\sqrt{\lambda_1}\,h},$$

и в этом случае (4.5.6) тоже неулучшаемо с точностью до абсолютного множителя.

Остановимся вкратце на истории неравенств типа (4.5.3) и (4.5.6). Впервые неравенство типа (4.5.6) было получено Громовым и Мильманом (в контексте римановой геометрии). Именно, ими доказано в [137], что

$$1 - \mu(A^h) \leq (1-p^2)\, e^{-\log(1+p)\sqrt{\lambda_1}\,h}, \tag{4.5.7}$$

где $p = \mu(A)$. Проведенное доказательство было основано на применении (4.5.1) к функциям вида $g(x) = \min\{\rho(A^{n\delta}, x), \delta\}$ и последующей итерации по n с подходящим δ, зависящем от h и λ_1.

По-видимому, такой подход не дает оптимальные оценки. Тем не менее, из (4.5.7) уже следует, что для некоторых абсолютных постоянных $t_0 > 0$ и C_0

$$\mathbf{E}e^{2\sqrt{\lambda_1}t_0|g|} \le C_0, \tag{4.5.8}$$

где g – произвольная липшицева функция на M ($\|g\|_{Lip} \le 1$) со средним $\mathbf{E}g = 0$. Аналогичный результат – неравенство (4.5.8) с $t_0 = \frac{1}{24}$ и $C_0 = 2$ – был позднее получен Боровковым и Утевым ([10], Теорема 2). Неравенство Пуанкаре (4.5.1) ими рассматривалось вне связи со свойством концентрации, причем для вероятностных мер μ на прямой $M = \mathbf{R}$. Используемый ими метод работает, однако, и в абстрактной ситуации: (4.5.1) применяется к функциям вида $|g|^p$ и из получаемого рекуррентного неравенства, с учетом того, что $\lambda_1 \operatorname{Var}(g) \le 1$, выводятся оценки для моментов

$$\big(2\sqrt{\lambda_1}\,\big)^p\, \mathbf{E}|g|^p \le (4p)^p, \quad p \ge 1,$$

откуда (4.5.8) сразу следует. Заметим, что в силу (4.5.6) имеет место правильная по порядку оценка $\big(2\sqrt{\lambda_1}\,\big)^p\, \mathbf{E}|g|^p \le 6\,\Gamma(p+1)$ (где Γ – гамма-функция).

Близкие к работе Громова и Мильмана рассуждения были проведены Аидой, Масудой и Шигекавой [54], доказавшими конечность $\mathbf{E}e^{2\sqrt{\lambda_1}t|g|}$ при $|t| < t_0 = \frac{1}{2(e-1)}$. Дальнейшее уточнение было сделано в работе Аиды и Струка [55], ограничившимися, правда, значением $t = \frac{1}{2}$ при оценивании экспоненциального момента $u(t) = \mathbf{E}e^{2\sqrt{\lambda_1}tg}$. Применение (4.5.1) к функции $e^{\sqrt{\lambda_1}tg}$ приводит к функциональному неравенству

$$u(t) \le \frac{1}{1-t^2}\, u\Big(\frac{t}{2}\Big)^2,$$

и после n-кратного применения этого неравенства к значениям t, $\frac{t}{2}$, … , $\frac{t}{2^{n-1}}$, получаем

$$u(t) \le \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(1-t^2/4^k)^{2^k}}\, u\Big(\frac{t}{2^n}\Big)^{2^n}. \tag{4.5.9}$$

Очевидно, произведение в (4.5.9) сходится при $|t| < 1$, и так как $u(t) = 1 + o(t)$ при $t \to 0$ (в силу условия $\mathbf{E}g = 0$), имеем в пределе

$$\mathbf{E}e^{\sqrt{2}\lambda_1 tg} \le U(t) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1 - t^2/4^n)^{2^n}}, \quad |t| < 1. \tag{4.5.10}$$

В частности, при $t = \frac{1}{2}$, справедливо

$$\mathbf{E}e^{\sqrt{\lambda_1} g} \le K \equiv \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1 - 1/4^{n+1})^{2^n}} = 1.720102\ldots. \tag{4.5.11}$$

Это неравенство и есть результат Аиды и Струка. Чтобы рассуждения были совсем строгими, следует все выкладки проводить в предположении ограниченности g (с тем, чтобы не возникало проблем с экспоненциальной интегрируемостью), и затем с помощью усечений легко получить (4.5.10) уже для всех липшицевых g на M с нулевым средним.

Таким образом, согласно (4.5.10), экстремальным значением в (4.5.8) является $t_0 = 1$. Впервые конечность экспоненциальных моментов $\mathbf{E}e^{\sqrt{2}\lambda_1 tg}$ при $|t| < 1$ была недавно доказана Шмукеншлегером [211]. Он применял (4.5.1) к функциям вида $ge^{\sqrt{\lambda_1}tg}$ и, решая получаемое дифференциальное неравенство относительно функции $u(t)$, извлек оценку $\mathbf{E}e^{\sqrt{2}\lambda_1 tg} \le (1 - t^2)^{-4}$. Это, однако, хуже (особенно при $t \to 1$), чем (4.5.3) и (4.5.10), так как $U(t) \le \frac{1+t}{1-t} \le \frac{1}{(1-t^2)^4}$. Приступим, наконец, к доказательствам.

Доказательство теорем 4.5.1 и 4.5.2.

Начнем с (4.5.3). Согласно (4.5.10), остается лишь показать, что $U(t) \le \frac{1+t}{1-t}$ при $0 \le t < 1$, что равносильно неравенству $\sqrt{V(t)} \le 1 + t$, где

$$V(t) = (1 - t^2)\, U(t) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - t^2/4^n)^{2^n}}, \quad 0 \le t \le 1.$$

Разлагая в ряд Тейлора, имеем

$$\log V(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \, \frac{t^{2k}}{k\, 4^{nk}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{2k}}{k\,(2^{2k-1}-1)}\,, \tag{4.5.12}$$

следовательно функция V логарифмически выпукла. В частности, выпукла функция $\sqrt{V(t)}$, и значит неравенство $\sqrt{V(t)} \leq 1+t$ нужно проверять лишь в концевых точках интервала $[0,1]$. При $t=0$ доказывать нечего; при $t=1$ нужно показать, что $\log V(1) \leq \log 4$. Так как $2^{2k-1}-1 \geq 4^{k-1}$ при $k \geq 1$, можно оценить, используя (4.5.12):

$$\log V(1) \leq 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\, 4^{k-1}} = 4 \log \frac{4}{3}\,.$$

Остается заметить, что $\left(\frac{4}{3}\right)^4 \leq 4$.

Выведем теперь (4.5.5) и (4.5.6), опираясь одновременно на неравенства (4.5.1) и (4.5.11). Предположим, что $\|g\|_{Lip} \leq 1$ (условие $\mathbf{E}g = 0$ временно не налагаем), и применим (4.5.1) к (ограниченной) функции $g_h = e^{\sqrt{\lambda_1}\min(g,h)}$, $h \in \mathbf{R}$:

$$\lambda_1 \mathbf{E} g_h^2 \leq \lambda_1 (\mathbf{E} g_h)^2 + \mathbf{E}|\nabla g_h|^2. \tag{4.5.13}$$

В силу (4.5.11), $\mathbf{E}g_h = \mathbf{E}e^{\sqrt{\lambda_1}g} \leq K\, e^{\sqrt{\lambda_1}\mathbf{E}g_h} \leq K\, e^{\sqrt{\lambda_1}\mathbf{E}g}$. Кроме того, так как $|\nabla g_h| = 0$ на множестве $\{g > h\}$ и $|\nabla g_h| \leq \sqrt{\lambda_1} e^{\sqrt{\lambda_1}g}$ на всем M, имеем $\mathbf{E}|\nabla g_h|^2 \leq \lambda_1 \mathbf{E} e^{2\sqrt{\lambda_1}g}\, 1_{\{g \leq h\}}$. Используя эти оценки в (4.5.13) и записывая

$$\mathbf{E} g_h^2 = \mathbf{E} e^{2\sqrt{\lambda_1}g}\, 1_{\{g \leq h\}} + e^{2\sqrt{\lambda_1}h} \mu\{g > h\},$$

приходим к неравенству $e^{2\sqrt{\lambda_1}h}\mu\{g > h\} \leq K^2 e^{2\sqrt{\lambda_1}\mathbf{E}g}$. Так как его правая часть непрерывно зависит от h, заключаем, что

$$\mu\{g \geq h\} \leq K^2\, e^{-2\sqrt{\lambda_1}h}\, e^{2\sqrt{\lambda_1}\mathbf{E}g}, \quad h \in \mathbf{R}. \tag{4.5.14}$$

Если $\mathbf{E}g = 0$ и $h \geq 0$, то вместе с соответствующим неравенством для $-g$ (4.5.14) дает $\mu\{g \geq h\} \leq 2K^2\, e^{-2\sqrt{\lambda_1}h}$. Отсюда получаем (4.5.5), так как $K^2 = 2.958750\ldots < 3$.

Если применить (4.5.14) при $h = 0$ к функции $g(x) = -\rho(A, x)$, то мы получим неравенство $e^{2\sqrt{\lambda_1}\mathbf{E}\rho(A,x)} \le \frac{K^2}{\mu(A)}$. Используя эту оценку в (4.5.14) с $h \ge 0$ и функцией $g(x) = \rho(A, x)$, заключаем, что

$$1 - \mu(A^h) = \mu\big\{x \in M : \rho(A, x) \ge h\big\} \le \frac{K^4}{\mu(A)}\, e^{-2\sqrt{\lambda_1}h}.$$

Это дает (4.5.6), так как $K^4 < 9$.

Наконец, докажем неравенство (4.5.4). Достаточно показать, что если $|\nabla g| \le \lambda < 2\sqrt{\lambda_1}$ и $\mathbf{E}g = 0$, то

$$\mathbf{E}g^2 e^g \le \frac{1}{\lambda_1}\left(\frac{2\sqrt{\lambda_1} + \lambda}{2\sqrt{\lambda_1} - \lambda}\right)^2 \mathbf{E}|\nabla g|^2 e^g. \tag{4.5.15}$$

Положим $x^2 = \mathbf{E}g^2 e^g$, $a^2 = \mathbf{E}|\nabla g|^2 e^g$ $(x, a \ge 0)$. Запишем неравенство (4.5.1) в более общей форме: если u и v – суммируемые с квадратом функции на M, имеющие конечную липшицеву норму на всех шарах в M и такие что $\mathbf{E}u = 0$, то $\big(\mathbf{E}uv\big)^2 \le \frac{1}{\lambda_1^2}\, \mathbf{E}|\nabla u|^2 \mathbf{E}|\nabla v|^2$. Применяя это неравенство к $u = g$ и $v = e^{g/2}$ и используя сделанные предположения, имеем

$$\big(\mathbf{E}ge^{g/2}\big)^2 \le \frac{1}{4\lambda_1^2}\, \mathbf{E}|\nabla g|^2 \mathbf{E}|\nabla g|^2 e^g \le \frac{\lambda^2}{4\lambda_1^2}\, a^2. \tag{4.5.16}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \lambda_1 \operatorname{Var}(ge^{g/2}) &\le \mathbf{E}|\nabla ge^{g/2}|^2 \le \mathbf{E}|\nabla g|^2 \big(1 + g/2\big)^2 e^g \\ &\le a^2 + \mathbf{E}|\nabla g|^2 ge^g + \frac{\lambda^2}{4}\, x^2. \end{aligned} \tag{4.5.17}$$

Средний член справа оценим по неравенству Коши–Буняковского:

$$\mathbf{E}|\nabla g|^2 ge^g = \mathbf{E}\big(|\nabla g|e^{g/2}\big)\big(|\nabla g|ge^{g/2}\big) \le \lambda\, ax.$$

Поэтому, согласно (4.5.17),

$$\lambda_1 \operatorname{Var}(ge^{g/2}) \le \Big(a + \frac{\lambda x}{2}\Big)^2. \tag{4.5.18}$$

Комбинируя (4.5.16) и (4.5.18), получаем:

$$x^2 = \big(\mathbf{E} g e^{g/2}\big)^2 + \mathrm{Var}(g e^{g/2}) \leq \frac{\lambda^2}{4\lambda_1^2}\, a^2 + \frac{1}{\lambda_1}\big(a + \frac{\lambda x}{2}\big)^2.$$

то есть, $(2\lambda_1 x)^2 \leq (\lambda a)^2 + \lambda_1 (2a + \lambda x)^2$. Отсюда

$$2\lambda_1 x \leq \lambda\, a + 2\sqrt{\lambda_1}\, a + \sqrt{\lambda_1}\, \lambda\, x,$$

и, таким образом, $(2\lambda_1 - \sqrt{\lambda_1}\, \lambda)\, x \leq (2\sqrt{\lambda_1} + \lambda)\, a$. Теорема 4.5.1 доказана.

Замечание 4.5.1. Неравенство (4.5.3) может быть немного усилено, если дополнительно к условиям теоремы 4.5.1 функция g имеет симметричное распределение (относительно нуля):

$$\mathbf{E} e^{2\sqrt{\lambda_1} t g} \leq \frac{1+t^2}{1-t^2}, \quad |t| < 1. \tag{4.5.19}$$

Чтобы доказать это, применим (4.5.1) к функции $\mathrm{sh}(\sqrt{\lambda_1} t g)$: так как $\mathbf{E}\, \mathrm{sh}(\sqrt{\lambda_1} t g) = 0$,

$$\lambda_1 \, \mathrm{Var}(\mathrm{sh}(\sqrt{\lambda_1} t g)) = \lambda_1 \mathbf{E}\, \mathrm{sh}^2(\sqrt{\lambda_1} t g) \leq \lambda_1 t^2 \mathbf{E}\, \mathrm{ch}^2(\sqrt{\lambda_1} t g),$$

а это и есть в точности (4.5.19) (с учетом, конечно, симметричности распределения g).

§ 4.6. О распределении функционалов на вероятностных метрических пространствах, подчиняющихся логарифмическим неравенствам типа Соболева

Снова пусть (M, ρ, μ) – вероятностное метрическое пространство. Теперь нашей исходной точкой будет логарифмическое неравенство типа Соболева

$$\mathrm{Ent}(g^2) \le 2c\, \mathbf{E}|\nabla g|^2, \tag{4.6.1}$$

где g – произвольная функция на M, имеющая конечную липшицеву константу на всех шарах в M, и $c < +\infty$ не зависит от g. Напомним, что мы используем обозначение

$$\mathrm{Ent}(g) = \mathrm{Ent}_\mu(g) = \mathbf{E}g \log g - \mathbf{E}g \log \mathbf{E}g$$

для энтропии g по отношению к μ (этот функционал корректно определен для всех μ-измеримых $g \ge 0$). Как и неравенство типа Пуанкаре, (4.6.1) обобщается на многомерные пространства (M^n, ρ_2, μ^n) без изменения постоянной c. Поэтому, изучение одномерной ситуации автоматически включает в себя возможные приложения к многомерным задачам (например, о концентрации продакт-меры).

Заметим, что неравенство (4.6.1) однородно, но не инвариантно относительно операции $g \to g + a$, и поэтому оно может быть формально усилено:

$$\mathcal{L}(g) \equiv \sup_{a \in \mathbf{R}} \mathrm{Ent}\left((g+a)^2\right) \le 2c\, \mathbf{E}|\nabla g|^2. \tag{4.6.2}$$

Однако, функционал $\mathcal{L}$ не может быть так явно записан в терминах распределения g, как энтропия. Мы получим еще одну эквивалентную форму, если применим (4.6.1) к функциям вида $e^{g/2}$:

$$\mathrm{Ent}(e^g) \le \frac{c}{2}\, \mathbf{E}|\nabla g|^2 e^g. \tag{4.6.3}$$

Это аналитическое неравенство уже инвариантно относительно операции $g \to g + a$.

Легко проверить, что при $a \to +\infty$ $\mathrm{Ent}\big((g+a)^2\big) \to 2\,\mathrm{Var}(g)$, поэтому (4.6.1) влечет неравенство типа Пуанкаре (4.5.1) с константой $\lambda_1 = \dfrac{1}{c}$. Тот факт, что (4.6.1) может быть существенно сильнее, чем (4.5.1), проявляется, например, в поведении экспоненциальных моментов липшицевых функций на M.

Вопрос об экспоненциальных моментах исследовался многими авторами после того, как в 1975 г. неравенства типа (4.6.1) были введены Гроссом [138] на примере гауссовского пространства $(\mathbf{R}^n, \rho, \gamma_n)$ (ρ – каноническая евклидова метрика). В частности, им было доказано, что в этом пространстве (4.6.1) выполняется с (оптимальной) постоянной $c = 1$. По свидетельству Гросса и Ротхауза [140] и Дэвиса и Саймона [122] впервые возможность изучения экспоненциальных моментов липшицевых функций на основе (4.6.1) было отмечена Хербстом. В публикациях его идея была реализована в [122] и много позднее в работе Аиды, Масуды и Шигекавы [54] (обнаружившими ошибку в работе Дэвиса и Саймона).

Напомним основной аргумент. Пусть g – ограниченная функция на M, такая что $|\nabla g| \le 1$ и $\mathbf{E} g = 0$. Если применить (4.6.1) к функциям вида $e^{tg^2/2}$, то мы получим дифференциальное неравенство первого порядка

$$ty'(t) - y(t)\log y(t) \le 2ct^2\, y'(t), \quad t \ge 0,$$

относительно функции $y(t) = \mathbf{E} e^{tg^2}$. При "решении" этого дифференциального неравенства нетрудно извлечь оценку [54]

$$\mathbf{E} e^{tg^2} \le \exp\Big\{ \frac{t}{1-2ct}\, \mathbf{E} g^2 \Big\}, \quad 0 \le t < \frac{1}{2c}. \tag{4.6.4}$$

Так как $\mathbf{E} g^2 \le c$ (в силу неравенства Пуанкаре), можно заключить, что распределение g имеет гауссовские хвосты (в случае гауссовского пространства свойство (4.6.3) очень близко к изопериметрическому неравенству).

Леду ([175], [176]) применил (4.6.1) к функциям вида $e^{tg/2}$: если теперь $y(t) = \mathbf{E}e^{tg^2}$, то (4.6.1) влечет другое (более простое) дифференциальное неравенство

$$ty'(t) - y(t)\log y(t) \le \frac{ct^2}{2}\,y(t), \quad t \ge 0,$$

которое после замены $y(t) = e^{tu(t)}$ совсем упрощается: $u'(t) \le \frac{c}{2}$. Так как $u(0^+) = 0$ (в силу условия $\mathbf{E}g = 0$), сразу получаем, что

$$\mathbf{E}e^{tg} \le e^{ct^2/2}, \quad t \in \mathbf{R}. \tag{4.6.5}$$

Как следствие, для всех $h \ge 0$

$$\mu\big\{g \ge h\big\} \le e^{-h^2/2c}. \tag{4.6.6}$$

Неравенства, близкие к (4.6.4) и (4.6.5), были также получены Ротхаузом [207], который исследовал поведение моментов $\mathbf{E}|g|^p$ для липшицевых функций g.

Здесь мы обсудим два результата, связанные с логарифмическими неравенствами типа Соболева. Основной вопрос, который нас будет интересовать, состоит в следующем: "Можно ли оценить на основе (4.6.1) экспоненциальные моменты функции g на M в терминах распределения модуля градиента $|\nabla g|$?" Важным примером может служить семейство неравенств (0.14), полученных для гауссовского пространства $(\mathbf{R}^n, \rho, \gamma_n)$ Пизье: для любой выпуклой функции Ψ на $\mathbf{R}$, для любой гладкой (эквивалентно – локально липшицевой) функции g на $\mathbf{R}^n$ со средним $\mathbf{E}g = 0$,

$$\mathbf{E}\Psi(g) \le \int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n} \Psi\big(\frac{\pi}{2}\,\langle\nabla g(x), y\rangle\big)\,d\gamma_n(x)\,d\gamma_n(y).$$

При $\Psi(x) = e^x$ мы приходим к неравенству

$$\mathbf{E}e^g \le \mathbf{E}e^{\frac{\pi^2}{8}\,|\nabla g|^2}. \tag{4.6.7}$$

Насколько оптимально это неравенство? Ясно, что для липшицевых g (4.6.7) несколько хуже по сравнению с (4.6.5). Оказывается, оба эти неравенства могут быть объединены и рассматриваться как частные случаи более общего неравенства для вероятностных метрических пространств (M, ρ, μ), подчиняющихся логарифмическому неравенству (4.6.1). Имеет место

Теорема 4.6.1. Пусть выполнено неравенство (4.6.1). Тогда для любой функции g на M со средним $\mathbf{E}g = 0$, имеющей конечную липшицеву константу на всех шарах в M, и для всех $\alpha > c/2$,

$$\mathbf{E}e^g \leq \left(\mathbf{E}e^{\alpha\,|\nabla g|^2}\right)^{c/(2\alpha - c)}. \tag{4.6.8}$$

В частности, при $\alpha = c$ мы получаем

$$\mathbf{E}e^g \leq \mathbf{E}e^{c\,|\nabla g|^2}. \tag{4.6.9}$$

Уже в гауссовском случае это неравенство представляет собой некоторое улучшение по сравнению с (4.6.7), так как $\frac{\pi^2}{8} > c = 1$. Если $|\nabla g| \leq 1$, то согласно (4.6.8), $\mathbf{E}e^{tg} \leq \exp\{\frac{\alpha c}{2\alpha - c}\,t^2\}$, и устремляя $\alpha \to +\infty$, мы приходим к неравенству Леду (4.6.5).

Доказательство теоремы 4.6.1 так же, как и доказательство неравенства (4.6.5), в большей степени основано на применении экспоненциальной формы (4.6.3), нежели исходного неравенства (4.6.1). Поэтому имеет смысл брать в качестве основы (4.6.3), причем можно требовать, чтобы это неравенство выполнялось не для "всех" g, а лишь для функций из какого-нибудь класса. Например, когда $M = \mathbf{R}^n$, можно рассматривать (4.6.3) на классе всех выпуклых g, и тогда (4.6.1) может оказаться существенно более сильным предположением. Приведем один пример, иллюстрирующий применение такого подхода.

Теорема 4.6.2. Пусть μ – равномерное распределение на дискретном кубе $\{-1, 1\}^n$. Для любой дифференцируемой функции g

на $\mathbf{R}^n$, покоординатно выпуклой и со средним $\mathbf{E}g = 0$,

$$\mathbf{E}e^g \le \mathbf{E}e^{2\,|\nabla g|^2}. \tag{4.6.10}$$

При этом, если $|\nabla g| \le 1$, то для всех $t \in \mathbf{R}$

$$\mathbf{E}e^{tg} \le e^{t^2}. \tag{4.6.11}$$

Как следствие, мы получаем неравенство (4.6.6) для уклонений по отношению к мере μ с постоянной $c = 2$ в классе всех липшицевых покоординатно выпуклых функций g на $\mathbf{R}^n$ с нулевым средним:

$$\mu\big\{g \ge h\big\} \le \exp\big\{-\frac{1}{4}h^2\big\}, \quad h \ge 0. \tag{4.6.12}$$

Аналогичное неравенство для уклоненй g относительно медианы $m(g)$,

$$\mu\{|g - m(g)| \ge h\} \le K\exp\big\{-\frac{1}{4}\big(h - \sqrt{\log 2}\,\big)^2\big\}, \tag{4.6.13}$$

$h \ge \sqrt{\log 2}$ (K – абсолютная постоянная) в предположении выпуклости g (вместо покоординатной выпуклости) было получено Талаграном как следствие изопериметрических неравенств для меры μ на классе всех выпуклых множеств в $\mathbf{R}^n$ [216]. С худшей константой в экспоненте (4.6.13) впервые появилось в работе Талаграна [213]; с другой стороны, в [216] показано, что множитель $\frac{1}{4}$ не может быть улучшен. Не известно, однако, можно ли избавиться от члена $\sqrt{\log 2}$. Также не известно, справедливо ли аналогичное неравенство в (4.6.12) для вероятностей левых уклонений $\mu\{g \le -h\}$.

Приступим к доказательствам. Чтобы избежать повторений при доказательстве (4.6.8) и (4.6.10), рассмотрим более абстрактную схему. Пусть (M, μ) – вероятностное пространство, и предположим, что на некотором семействе X ограниченных измеримых функций на M определен оператор Γ со следующими свойствами:

1) $\forall g \in X$, $\Gamma(g)$ – неотрицательная измеримая функция на M;

2) $\forall g \in X$, $\forall a \in \mathbf{R}, b \geq 0$, $a + bg \in X$ и $\Gamma(a+bg) = b\,\Gamma(g)$.

Лемма 4.6.1. Предположим, что для всех $g \in X$

$$\mathrm{Ent}(e^g) \leq \mathbf{E}\,\Gamma(g)^2 e^g. \tag{4.6.14}$$

Тогда для всех $g \in X$ со средним $\mathbf{E}g = 0$ и всех $\alpha > 1$,

$$\mathbf{E}e^g \leq \left(\mathbf{E}e^{\alpha\Gamma(g)^2}\right)^{1/(\alpha-1)}. \tag{4.6.15}$$

Доказательство. Будем использовать следующее хорошо известное представление для энтропии:

$$\mathrm{Ent}(v) = \sup \mathbf{E}\, vw,$$

где v – произвольная неотрицательная измеримая функция на M, и супремум берется по всем измеримым w на M, таким что математическое ожидание $\mathbf{E}\, vw$ существует, причем $\mathbf{E}e^w \leq 1$. В частности,

$$\mathbf{E}e^w = 1 \implies \mathbf{E}vw \leq \mathrm{Ent}(v). \tag{4.6.16}$$

Пусть $g \in X$, $\alpha > 1$. Если $\mathbf{E}e^{\alpha\Gamma(g)^2} = +\infty$, доказывать нечего. В противном случае положим $\beta = \log \mathbf{E}e^{\alpha\Gamma(g)^2}$, так что $\mathbf{E}e^w = 1$ для $w = \alpha\Gamma(g)^2 - \beta$. В силу (4.6.16), для всех измеримых функций $v \geq 0$

$$\mathrm{Ent}(v) \geq \mathbf{E}\big(\alpha\,\Gamma(g)^2 - \beta\big)v. \tag{4.6.17}$$

Применим (4.6.17) к $v = e^g$ и воспользуемся неравенством (4.6.14):

$$\mathrm{Ent}(e^g) \geq \mathbf{E}\big(\alpha\,\Gamma(g)^2 - \beta\big)e^g \geq \alpha\,\mathrm{Ent}(e^g) - \beta\,\mathbf{E}e^g.$$

Следовательно

$$\mathrm{Ent}(e^g) \leq \frac{\beta}{\alpha - 1}\,\mathbf{E}e^g. \tag{4.6.18}$$

Это неравенство справедливо для всех $g \in X$ и значит для функций вида tg, $t > 0$. Положим

$$\beta(t) = \log \mathbf{E} e^{\alpha t\, \Gamma(g)^2},$$

так что (4.6.18) для таких функций примет вид

$$\mathrm{Ent}(e^{tg}) \le \frac{\beta(t^2)}{\alpha - 1} \mathbf{E} e^{tg}. \tag{4.6.19}$$

Если теперь, следуя выводу (4.6.5), определить функцию $u(t)$, $t > 0$, с помощью равенства $\mathbf{E} e^{tg} = e^{tu(t)}$, то ввиду тождества $\mathrm{Ent}(e^{tg}) = t^2 u'(t) e^{tu(t)}$, (4.6.19) упрощается следующим образом:

$$u'(t) \le \frac{1}{\alpha - 1} \, \frac{\beta(t^2)}{t^2}, \quad t > 0.$$

Заметим, что функция $\beta(t)$ выпукла, $\beta(0) = 0$, при этом $\beta'(0) \ge 0$. Следовательно функция $\beta(t)/t$ не убывает на интервале $t > 0$. В частности, при $0 < t \le 1$ $u'(t) \le \dfrac{\beta(1)}{\alpha - 1} = \dfrac{\beta}{\alpha - 1}$. В силу условия $\mathbf{E} g = 0$, имеем $u(0^+) = 0$, поэтому $u(1) \le \dfrac{\beta}{\alpha - 1}$, то есть

$$\mathbf{E} e^{g} = e^{u(1)} \le e^{\frac{\beta}{\alpha - 1}}.$$

Это и есть искомое неравенство (4.6.15). Лемма 4.6.1 доказана.

Доказательство теорем 4.6.1 и 4.6.2. Условие (4.6.3) в теореме 4.6.1 есть предположение (4.6.10) с оператором $\Gamma(g) = \sqrt{\frac{c}{2}}\, |\nabla g|$. В силу леммы 4.6.1, неравенство (4.6.9) имеет силу в классе X всех ограниченных функций на M, имеющих конечную липшицеву константу на всех шарах в M и нулевое среднее. Условие ограниченности в (4.6.9) легко снимается с помощью процедуры усечений. Таким образом, теорема 4.6.1 доказана.

Для доказательства теоремы 4.6.2 воспользуемся логарифмическим неравенством типа Соболева на дискретном кубе (Гросс, [138]):

$$\mathrm{Ent}(g^2) \le 2\, \mathbf{E} D(g)^2. \tag{4.6.20}$$

Здесь g – произвольная функция на $\{-1,1\}^n$, и $D(g)$ – длина дискретного градиента, т.е.,

$$D(g)(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Big| \frac{g(x) - g(s_i(x))}{2} \Big|^2}, \quad x \in \{-1,1\}^n,$$

(как и ранее, $s_i(x)$ – сосед x по i-му направлению: $(s_i(x))_j = x_i$ при $j \neq i$ и $(s_i(x))_i = -x_i$).

Пусть g – дифференцируемая функция на кубе $[-1,1]^n$, выпуклая по каждой переменной. Заметим, что для любой дифференцируемая функции v на $[-1,1]$ $(v(1) - v(-1))^2 \leq v'(1)^2 + v'(-1)^2$, следовательно

$$D(g)^2(x) \leq |\nabla g(x)|^2 + \sum_{i=1}^{n} \Big| \frac{\partial g(s_i(x))}{\partial x_i} \Big|^2, \quad x \in \{-1,1\}^n.$$

Мера μ инвариантна относительно отображения $x \to s_i(x)$, поэтому для всех $i \leq n$ $\mathbf{E}\Big| \frac{\partial g(s_i(x))}{\partial x_i} \Big|^2 = \mathbf{E}\Big| \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} \Big|^2$. Следовательно $\mathbf{E}D(g)^2 \leq 2\mathbf{E}|\nabla g|^2$, и в силу (4.6.20),

$$\mathrm{Ent}(g^2) \leq 4\,\mathbf{E}|\nabla g|^2. \tag{4.6.21}$$

Применяя (4.6.21) к функции $e^{g/2}$ (а она тоже дифференцируема и выпукла по каждой переменной), получаем, что

$$\mathrm{Ent}(e^g) \leq \mathbf{E}|\nabla g|^2 e^g. \tag{4.6.22}$$

Таким образом, выполняются условия леммы 4.6.1 для оператора $\Gamma(g) = |\nabla g|$, определенного на классе X всех дифференцируемых функций на кубе $[-1,1]^n$, выпуклых по каждой переменной. Как результат, для всех $g \in X$ и всех $\alpha > 1$

$$\mathbf{E}e^g \leq \Big(\mathbf{E}e^{\alpha|\nabla g|^2}\Big)^{1/(\alpha-1)}. \tag{4.6.23}$$

При $\alpha = 2$ мы приходим к (4.6.10). Если $|\nabla g| \leq 1$, то получаем $\mathbf{E}e^{tg} \leq e^{\alpha t^2/(\alpha-1)}$, и устремляя $\alpha \to +\infty$, приходим к (4.6.11). Теорема 4.6.2 тоже доказана.

Замечание 4.6.1. Легко показать, что (4.6.22) справедливо для произвольных функций g на дискретном кубе, если $|\nabla g|$ заменить на модуль дискретного градиента $D(g)$. Как следствие леммы 4.6.1, мы получаем дискретный аналог (4.6.23) и, в частности, неравенство

$$\mathbf{E}e^g \le \mathbf{E}e^{2D(g)^2}. \tag{4.6.24}$$

Можно рассматривать (4.6.24) и как дискретный аналог неравенства Пизье (4.6.7) для гауссовской меры γ_n (вопрос о справедливости такого неравенства был поднят Пизье [202]).

Замечание 4.6.2. С худшей, но универсальной постоянной перед $\mathbf{E}|\nabla g|^2 e^g$, Леду [177] установил неравенство (4.6.22) по отношению к произвольным продакт-мерам $\mu = \mu_1 \times \cdots \times \mu_n$ на кубе $[-1,1]^n$ (в том же классе X). Именно, имеет место неравенство

$$\mathrm{Ent}_\mu(e^g) \le 2\,\mathbf{E}_\mu |\nabla g|^2 e^g.$$

Как следствие леммы 4.6.1, мы получаем аналог (4.6.10) с постоянной 4 в экспоненте (вместо 2).

§ 4.7. Вероятностные меры на прямой, удовлетворяющие логарифмическим неравенствам типа Соболева

Здесь мы дадим характеризацию всех вероятностных мер μ на прямой $\mathbf{R}$, которые удовлетворяют логарифмическому неравенству типа Соболева

$$\mathrm{Ent}(g^2) \leq c\,\mathbf{E}|g'|^2 \tag{4.7.1}$$

с некоторой постоянной $c < +\infty$, не зависящей от g (g – произвольная гладкая, т.е., непрерывно дифференцируемая функция на $\mathbf{R}$ или, что эквивалентно, – произвольная абсолютно непрерывная функция на $\mathbf{R}$, и тогда g' – ее производная в смысле Радона–Никодима). Математическое ожидание и энтропия в (4.7.1) понимаются в смысле меры μ.

Обозначим через $F(x) = \mu((-\infty, x])$, $x \in \mathbf{R}$, функцию распределения и через f – плотность абсолютно непрерывной компоненты меры μ (по отношению к мере Лебега). Обозначим через $m = m(\mu)$ (любую) медиану меры μ и определим

$$D_0 = \sup_{x<m}\, F(x)\,\log\frac{1}{F(x)}\int_x^m \frac{1}{f(t)}\,dt,$$
$$D_1 = \sup_{x>m}\,(1-F(x))\,\log\frac{1}{1-F(x)}\int_m^x \frac{1}{f(t)}\,dt.$$

Если $\mu((-\infty, m)) = 0$ и/или $\mu((m, +\infty)) = 0$, то соответственно полагаем $D_0 = 0$ и $D_1 = 0$. Нашей целью будет

Теорема 4.7.1. Для оптимальной постоянной c в (4.7.1) справедливы неравенства

$$K_0(D_0 + D_1) \leq c \leq K_1(D_0 + D_1), \tag{4.7.2}$$

где K_0 и K_1 – некоторые абсолютные постоянные (можно положить $K_0 = 1/150$, $K_1 = 360$).

Таким образом, $c < +\infty$ тогда и только тогда, когда $D_0 + D_1 < +\infty$.

В дальнейшем будем считать, что мера μ не вырождена (не сосредоточена в точке m). Схематично план доказательства теоремы 4.7.1 состоит в следующем: через форму (4.6.2) мы сначала трансформируем (4.7.1) в неравенство типа Харди (4.3.12), но не в пространстве L^p, а в подходящем пространстве Орлича, обобщим результат Артолы, Таленти и Томаселли (точнее теорему 4.3.3 при $p = 2$) на идеальные банаховы пространства (в частности, на пространства Орлича), и затем применим полученное обобщение при выводе (4.7.2).

Нам потребуется рассматривать два пространства Орлича L_N и L_Ψ, порожденные функциями Юнга

$$N(x) = x^2 \log(1 + x^2) \quad \text{и} \quad \Psi(x) = |x| \log(1 + |x|), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Как обычно, норма в таких пространствах обозначается соответственно $\|g\|_N$ и $\|g\|_\Psi$, в то время как $\|g\|_p$ обозначает норму в пространстве L^p $(p \geq 1)$. Напомним, что

$$\|g\|_N = \inf \big\{ \lambda > 0 : \mathbf{E} N(g/\lambda) \leq 1 \big\}.$$

Аналогично определяется $\|g\|_\Psi$. Очевидно, N и Ψ связаны соотношением $N(x) = \Psi(x^2)$, так что $\|g^2\|_\Psi = \|g\|_N^2$.

В (4.6.2) мы ввели функционал

$$\mathcal{L}(g) = \sup_{a \in \mathbf{R}} \operatorname{Ent}\big((g + a)^2\big),$$

в терминах которого (4.7.1) эквивалентно записывается как неравенство

$$\mathcal{L}(g) \leq c\, \mathbf{E} |g'|^2. \tag{4.7.3}$$

Чтобы связать (4.7.3) с более привычными неравенствами, докажем следующее утверждение.

Лемма 4.7.1. Пусть (M, μ) – вероятностное пространство. Для всех $g \in L_N(M, \mu)$

$$\frac{2}{3} \left\| g - \mathbf{E}_\mu g \right\|_N^2 \le \mathcal{L}(g) \le \frac{5}{2} \left\| g - \mathbf{E}_\mu g \right\|_N^2. \tag{4.7.4}$$

Таким образом, логарифмическое неравенство типа Соболева (4.6.1) с точностью до абсолютного множителя K эквивалентно неравенству типа Пуанкаре

$$\|g - \mathbf{E}g\|_N \le K\sqrt{c}\, \|\nabla g\|_2.$$

В интересующем нас случае $M = \mathbf{R}$ это неравенство может быть далее сведено к неравенству типа Харди, как показывает следующее утверждение. Для функций g, определенных на $\mathbf{R}$, будем использовать обозначения $g_0 = g\, 1_{(-\infty, m]}$, $g_1 = g\, 1_{[m, +\infty)}$.

Лемма 4.7.2. Допустим, что для всех гладких функций g на $\mathbf{R}$

$$\mathrm{Ent}(g^2) \le c\, \mathbf{E}|g'|^2. \tag{4.7.5}$$

Тогда для всех гладких функций g на $\mathbf{R}$, таких что $g(m) = 0$,

$$\left\| g_0^2 \right\|_\Psi + \left\| g_1^2 \right\|_\Psi \le d\, \mathbf{E}|g'|^2 \tag{4.7.6}$$

с постоянной $d = 75c/2$. Обратно, (4.7.6) влечет (4.7.5) с постоянной $c = 45d$.

При доказательстве лемм 4.7.1 и 4.7.2 нам потребуется

Лемма 4.7.3. $\quad \|g\|_1 \le \|g\|_2 \le \dfrac{\sqrt{5}}{2} \|g\|_N$ для всех $g \in L_N(M, \mu)$.

Доказательство. Не умаляя общности, пусть $\|g\|_N = 1$. Так как $\mathbf{E}\Psi(g^2) = \mathbf{E}N(g) = 1$, по неравенству Йенсена $\Psi\big(\mathbf{E}g^2\big) \le 1$. Следовательно $\mathbf{E}g^2 \le \Psi^{-1}(1) < 5/4$, так как $\Psi(5/4) = 1.014\ldots > 1$ (Ψ^{-1} – функция, обратная к Ψ, суженной на $[0, +\infty)$). Таким образом, $\|g\|_2 < \sqrt{5/4}$.

Доказательство леммы 4.7.1. Можно считать, что $\mathbf{E}g = 0$ и $\|g\|_N = 1$. Чтобы доказать второе неравенство в (4.7.4), воспользуемся неравенством Ротхауза ([H], лемма 10)

$$\mathcal{L}(g) \le \mathrm{Ent}(g^2) + 2\,\mathbf{E}g^2 \quad (\mathbf{E}g = 0). \tag{4.7.7}$$

Рассмотрим функцию $U(x) = 2x - x\log x$, $x \ge 0$, и заметим, что $\mathbf{E}g^2 \log g^2 \le \mathbf{E}g^2 \log(1 + g^2) = \mathbf{E}N(g) = 1$. Следовательно

$$\mathrm{Ent}(g^2) + 2\mathbf{E}g^2 = \mathbf{E}g^2 \log g^2 + U\big(\mathbf{E}g^2\big) \le 1 + U\big(\mathbf{E}g^2\big). \tag{4.7.8}$$

Функция $U(x)$ возрастает на интервале $0 \le x \le e$, поэтому, в силу леммы 4.7.3, $U(\mathbf{E}g^2) < U\big(\frac{5}{4}\big) = \frac{5}{2} - \Psi\big(\frac{5}{4}\big) < \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2}$. Комбинируя (4.7.7) и (4.7.8), получаем $\mathcal{L}(g) \le 5/2$, что и доказывает второе неравенство в (4.7.4)

Чтобы вывести первое неравенство в (4.7.4), будем считать, что $g \in L_N(M, \mu)$, $\mathbf{E}g = 0$ и (по однородности), что $\mathcal{L}(g) = 2$. Так как в общем случае

$$\mathbf{E}g^2 - (\mathbf{E}g)^2 = \frac{1}{2} \lim_{|a| \to \infty} \mathrm{Ent}\left((g + a)^2\right) \le \frac{1}{2}\,\mathcal{L}(g),$$

имеем $\mathbf{E}g^2 \le 1$, и поэтому $\mathbf{E}g^2 \log \mathbf{E}g^2 \le 0$. Следовательно,

$$\mathbf{E}g^2 \log g^2 = \mathrm{Ent}(g^2) + \mathbf{E}g^2 \log \mathbf{E}g^2 \le \mathrm{Ent}(g^2) \le \mathcal{L}(g) = 2.$$

Но, как нетрудно видеть, $\Psi(x) \le 1 + x\log x$ при $x \ge 0$, поэтому

$$\mathbf{E}N(g) = \mathbf{E}\Psi(g^2) \le 1 + \mathbf{E}g^2 \log g^2 \le 3.$$

Применяя элементарное неравенство $N\big(\frac{x}{\sqrt{3}}\big) \le \frac{1}{3}N(x)$, получаем $\mathbf{E}N\big(\frac{g}{\sqrt{3}}\big) \le 1$, то есть, $\big\|\frac{g}{\sqrt{3}}\big\|_N \le 1$. Таким образом, $\|g\|_N^2 \le 3 = \frac{3}{2}\,\mathcal{L}(g)$. Лемма 4.7.1 доказана.

При доказательстве леммы 4.7.2 нам потребуется

Лемма 4.7.4. Для любой функции $g \in L_N(\mathbf{R}, \mu)$

$$\left\|g - \mathbf{E}g\right\|_N \le 3\,\|g\|_N. \tag{4.7.9}$$

Кроме того, если $g = 0$ на $(-\infty, m)$, то

$$\|g\|_N \le 5\,\left\|g - \mathbf{E}g\right\|_N. \tag{4.7.10}$$

Доказательство. В силу леммы 4.7.3, имеем

$$\left\|g - \mathbf{E}g\right\|_N \le \|g\|_N + \|g\|_1 \le 3\|g\|_N.$$

Это доказывает (4.7.9). Чтобы вывести (4.7.10), заметим, что по неравенству Коши–Буняковского (с учетом того, что m – медиана меры μ) и снова в силу леммы 4.7.3,

$$\left|\mathbf{E}g\right| = \left|\mathbf{E}g\,1_{(-\infty,m)}\right| \le \|g\|_2\,\frac{1}{\sqrt{2}} \le \sqrt{\frac{5}{8}}\,\|g\|_N.$$

Следовательно

$$\|g\|_N \le \left\|g - \mathbf{E}g\right\|_N + \left|\mathbf{E}g\right| \le \left\|g - \mathbf{E}g\right\|_N + \sqrt{\frac{5}{8}}\,\|g\|_N.$$

Таким образом, $\|g\|_N \le \dfrac{1}{1 - \sqrt{\frac{5}{8}}}\,\left\|g - \mathbf{E}g\right\|_N \le 5\,\left\|g - \mathbf{E}g\right\|_N.$

Доказательство леммы 4.7.2. Сначала выведем неравенство (4.7.6), опираясь на (4.7.5). В силу леммы 4.7.1, для любой гладкой функции $g \in L_N(\mathbf{R}, \mu)$

$$\frac{2}{3}\left\|g - \mathbf{E}g\right\|_N^2 \le c\,\mathbf{E}|g'|^2. \tag{4.7.11}$$

В таком неравенстве условие гладкости g может быть, очевидно, ослаблено до условия абсолютной непрерывности. Действительно, можно записать (4.7.11) в терминах производной Радона–Никодима g', и если это неравенство выполняется для непрерывных g', то оно будет выполняться и для локально суммируемых (по мере Лебега) g'. Заметим, что такой аргумент позволяет заменить меру μ в правой части (4.7.11) на ее абсолютно непрерывную компоненту, и значит интеграл в этой правой части можно рассматривать лишь на множестве полной лебеговой меры, в частности, на множестве $\mathbf{R}\setminus\{m\}$. Следовательно, в предположении $g(m)=0$ можно применить (4.7.11) к функциям g_0 и g_1:

$$\frac{2}{3}\,\|g_0-\mathbf{E}g_0\|_N^2 \le c\int_{-\infty}^{m}|g'(x)|^2 d\mu(x),$$

$$\frac{2}{3}\,\|g_1-\mathbf{E}g_1\|_N^2 \le c\int_{m}^{+\infty}|g'(x)|^2 d\mu(x)$$

(интегралы справа берутся по открытым интервалам $(-\infty,m)$ и $(m,+\infty)$). Применяя неравенство (4.7.10) и тождество $\|g\|_N^2 = \|g^2\|_\Psi$, получаем

$$\frac{2}{75}\,\|g_0^2\|_\Psi \le c\int_{-\infty}^{m}|g'(x)|^2 d\mu(x),$$
$$\frac{2}{75}\,\|g_1^2\|_\Psi \le c\int_{m}^{+\infty}|g'(x)|^2 d\mu(x).$$

Складывая эти неравенства, приходим к (4.7.6).

При выводе (4.7.5) из (4.7.6) будем использовать неравенство (4.7.9). Пусть сначала $g(m)=0$. Так как $g=g_0+g_1$, имеем

$$\begin{aligned}\|g-\mathbf{E}g\|_N^2 &\le \big(\,\|g_0-\mathbf{E}g_0\|_N+\|g_1-\mathbf{E}g_1\|_N\big)^2\\ &\le 9\,\big(\,\|g_0\|_N+\|g_1\|_N\big)^2 \le 18\,\big(\,\|g_0\|_N^2+\|g_1\|_N^2\big)\\ &= 18\,\big(\,\|g_0^2\|_\Psi+\|g_1^2\|_\Psi\big) \le 18d\,\mathbf{E}|g'|^2\end{aligned}$$

(неравенство (4.7.6) использовалось на последнем шаге). Применяя теперь лемму 4.7.1, получаем

$$\mathcal{L}(g) \le \,\frac{5}{2}\,\|g-\mathbf{E}g\|_N^2 \le 45d\,\mathbf{E}|g'|^2.$$

Это неравенство инвариантно относительно сдвигов $g\to g+const$, поэтому условие $g(m)=0$ может быть снято. Наконец, так как

$\mathrm{Ent}(g^2) \le \mathcal{L}(g)$ для всех абсолютно непрерывных $g \in L_N(\mathbf{R}, \mu)$, получаем $\mathrm{Ent}(g^2) \le 45d\,\mathbf{E}|g'|^2$. Неравенство (4.7.5) и с ним лемма 4.7.2 доказаны.

Не умаляя общности, будем далее предполагать, что $m(\mu) = 0$. Теперь мы можем сконцентрироваться на характеризации мер μ, удовлетворяющих неравенствам типа Харди (4.7.6) по отношению к норме Орлича в пространстве L_Ψ. Нам будет удобнее сначала доказать одно утверждение о произвольных идеальных банаховых пространствах X λ-измеримых функций на полуоси $M = (0, +\infty)$ и лишь затем дважды применить общий результат к пространству $X = L_\Psi(M, \lambda)$ (в роли λ будет сначала выступать сужение μ на полуось $(0, +\infty)$, а потом – мера $\lambda(A) = \mu(-A)$, $A \subset (0, +\infty)$).

Итак, пусть λ – неотрицательная конечная мера на полуоси $(0, +\infty)$, и пусть $(X, \|\cdot\|)$ – идеальное банахово пространство λ-измеримых функций (определения были даны в § 1.6; см. [16], [165]). Обозначим через f_λ плотность абсолютно-непрерывной компоненты меры λ по отношению к мере Лебега. Справедлива

Лемма 4.7.5. Пусть $C = C(X, \lambda)$ оптимальная постоянная в неравенстве

$$\|g^2\| \le C\,\mathbf{E}_\lambda |g'|^2, \tag{4.7.12}$$

где $g \in X$ – произвольная гладкая функция на $[0, +\infty)$, такая что $g(0) = 0$. Тогда $B \le C \le 4B$, где

$$B = B(X, \lambda) = \sup_{x>0} \|\, 1_{(x,+\infty)} \,\| \int_0^x \frac{dt}{f_\lambda(t)}\,. \tag{4.7.13}$$

Доказательство. Пусть ν – неотрицательная конечная мера на полуоси $(0, +\infty)$. Обозначим через $C(\nu, \lambda)$ оптимальную постоянную в неравенстве

$$\|g\|^2_{L^2(\nu)} \le C(\nu, \lambda)\, \|g'\|^2_{L^2(\lambda)}$$

при тех же условиях на g. Определим также

$$B(\nu,\lambda)=\sup_{x>0}\nu((x,+\infty))\int_0^x\frac{dt}{f_\lambda(t)}$$

(полагаем $B(\nu,\lambda)=0$, если $\nu=0$). В силу теоремы 4.3.3 с $p=2$

$$B(\nu,\lambda)\le C(\nu,\lambda)\le 4B(\nu,\lambda). \tag{4.7.14}$$

Представим норму в X в виде

$$\|g\|=\sup_{v\in V}\int_0^\infty|g(x)|v(x)\,d\lambda(x), \tag{4.7.15}$$

где V некоторое семейство неотрицательных ограниченных измеримых (по Борелю) функций v на $(0,+\infty)$, и введем меры $\nu_v(dx)=v(x)\lambda(dx)$. Тогда непосредственно в силу сделанных определений постоянных C и B и представления (4.7.15), мы получим

$$C(X,\lambda)=\sup_{v\in V}C(\nu_v,\lambda),\quad B(X,\lambda)=\sup_{v\in V}B(\nu_v,\lambda).$$

Следовательно, применяя (4.7.14), получаем требуемые соотношения $B(X,\lambda)\le C(X,\lambda)\le 4B(X,\lambda)$. Лемма 4.7.5 доказана.

В частном случае, когда $X=L_\Psi(\lambda)$, имеем

$$\left\|1_{(x,+\infty)}\right\|_\Psi=\frac{1}{\Psi^{-1}\left(\dfrac{1}{\lambda((x,+\infty))}\right)},$$

где, как обычно, Ψ^{-1} обозначает функцию, обратную к $\Psi(x)=x\log(1+x)$, $x\ge 0$. Поэтому, согласно определению постоянной B в (4.7.13), оптимальная постоянная C в неравенстве (4.7.12) для нормы $\|\cdot\|=\|\cdot\|_\Psi$ удовлетворяет, в силу леммы 4.7.5, соотношениям

$$C\ \ge\ \sup_{x>0}\frac{1}{\Psi^{-1}(\frac{1}{\lambda((x,+\infty))})}\int_0^x\frac{dt}{f_\lambda(t)}, \tag{4.7.16}$$

$$C\ \le\ 4\sup_{x>0}\frac{1}{\Psi^{-1}(\frac{1}{\lambda((x,+\infty))})}\int_0^x\frac{dt}{f_\lambda(t)}. \tag{4.7.17}$$

Чтобы упростить с точностью до абсолютных множителей выражения в правых частях этих неравенств, докажем следующее элементарное утверждение.

Лемма 4.7.6. Пусть $c_1 = \dfrac{1}{2}$, $c_2 = 2$. Для всех $t \geq 2$

$$c_1 \frac{t}{\log t} \leq \Psi^{-1}(t) \leq c_2 \frac{t}{\log t}. \tag{4.7.18}$$

Доказательство. Первое неравенство в (4.7.18), то есть, неравенство

$$\Psi\Big(\frac{c_1 t}{\log t}\Big) = \frac{c_1 t}{\log t} \log\Big(1 + \frac{c_1 t}{\log t}\Big) \leq t,$$

в силу того, что $\dfrac{c_1}{\log t} \leq 1$ при $t \geq 2$ и $c_1 = \dfrac{1}{2}$, вытекает из более сильного неравенства $\dfrac{c_1 t}{\log t} \log(1+t) \leq t$, которое эквивалентно неравенству $1 + t \leq t^2$. Последнее очевидно.

Второе неравенство в (4.7.18) $\dfrac{c_2 t}{\log t} \log\Big(1 + \dfrac{c_2 t}{\log t}\Big) \geq t$ может быть записано в виде

$$1 + \frac{c_2 t}{\log t} \geq t^{1/c_2}$$

и будет следовать из неравенства $\dfrac{c_2 t}{\log t} \geq t^{1/c_2}$. При $c_2 = 2$ последнее эквивалентно неравенству $u(t) = \dfrac{\log t}{2\sqrt{t}} \leq 1$. Функция u достигает максимум на интервале $[2, +\infty)$ в точке $t = e^2$, и остается заметить, что $u(e^2) = 1/e < 1$. Лемма 4.7.6 доказана.

Остается сделать последний шаг.

Доказательство теоремы 4.7.1. Неравенство (4.7.6) эквивалентно одновременному выполнению двух неравенств:

$$\big\|g_0^2\big\|_\Psi \leq d \int_{-\infty}^{0} |g_0'(x)|^2 d\mu(x), \tag{4.7.19}$$

$$\big\|g_1^2\big\|_\Psi \leq d \int_{0}^{\infty} |g_1'(x)|^2 d\mu(x), \tag{4.7.20}$$

где g_0 и g_1 – произвольные гладкие функции, определенные соответственно на полуосях $(-\infty, 0]$ и $[0, +\infty)$ и такие, что $g_0(0) =$

$g_1(0) = 0$. Применим (4.7.16)–(4.7.18) к сужению λ меры μ на полуось $(0, +\infty)$: оптимальная постоянная d_1 (в роли d) в неравенстве (4.7.20) должна удовлетворять соотношениям

$$d_1 \;\geq\; \frac{1}{2} \sup_{x>0} \mu((x,+\infty)) \log \frac{1}{\mu((x,+\infty))} \int_0^x \frac{dt}{f(t)}\,, \tag{4.7.21}$$

$$d_1 \;\leq\; 8 \sup_{x>0} \mu((x,+\infty)) \log \frac{1}{\mu((x,+\infty))} \int_0^x \frac{dt}{f(t)}\,. \tag{4.7.22}$$

Применяя лемму 4.7.6, мы использовали тот факт, что при $x > 0$ $t = \dfrac{1}{\mu((x,+\infty))} \geq 2$ (что верно, так как $m = 0$ – медиана μ). Вспоминая определения D_1, можно переписать (4.7.21)–(4.7.22) в виде

$$\frac{1}{2}\, D_1 \leq d_1 \leq 8\, D_1. \tag{4.7.23}$$

По аналогичным причинам, применяя лемму 4.7.5 и лемму 4.7.6 к мере $\lambda(A) = \mu(-A)$, $A \subset (0, +\infty)$, заключаем, что оптимальная постоянная d_0 (в роли d) в неравенстве (4.7.19) должна удовлетворять соотношениям

$$\frac{1}{2}\, D_0 \leq d_0 \leq 8\, D_0 \tag{4.7.24}$$

Здесь мы еще воспользовались тем очевидным фактом, что в определении D_0 $F(x)$ можно заменить на $F(x^-) = \mu((-\infty, x))$.

В силу леммы 4.7.2, неравенство (4.7.6), то есть, неравенства (4.7.19)–(4.7.20), выполняются с постоянной $d = 75c/2$. Но так как $d = \max(d_0, d_1)$ оптимальна для одновременного выполнения (4.7.19) и (4.7.20), заключаем, с учетом (4.7.23)–(4.7.24), что $\dfrac{1}{2} \max(D_0, D_1) \leq 75c/2$. Отсюда $D_0 + D_1 \leq 150\, c$, так что первое неравенство в (4.7.2) в теореме 4.7.1 справедливо при $K_0 = 1/150$.

Обратно, снова в силу леммы 4.7.2, $c \leq 45\, d = 45 \max(d_0, d_1)$, так что, применяя теперь правые неравенства в (4.7.23)–(4.7.24), получаем $c \leq 45 \cdot 8 \max(D_0, D_1) \leq 360\, (D_0 + D_1)$. Следовательно второе неравенство в (4.7.2) справедливо при $K_1 = 360$.

Теорема 4.7.1 доказана полностью.

§ 4.8. Примечания

Изложение §§ 4.1–4.2 следует работе [80]. Элегантное доказательство леммы 4.1.1 найдено А.В.Жубром (первоначальное доказательство использовало вариационные рассуждения, причем в условии (4.1.9) предполагалось (достаточное для дальнейших нужд) равенство вместо неравенства. Доказательство теоремы 4.2.1 немного упрощено: здесь мы следуем основной линии использования неравенств вида (4.2.11), в то время как индукционный шаг доказательства в [80] был основан на неравенствах вида $\mathrm{Var}(g) \le \mathbf{E}\sqrt{1 + C(a)^2|\nabla g|^2} - 1$. Интересно, что два подхода приводят к одной и тоже абсолютной постоянной $\frac{1}{2\sqrt{6}}$.

Изопериметрические константы можно определять более общо и по отношению к некоторой положительной на (0,1) функции I:

$$Is_I(\mu) = \inf_{0<\mu(A)<1} \frac{\mu^+(A)}{I(\min(\mu(A), 1-\mu(A))}.$$

Например, для (нормализованной) меры Лебега на n-мерном многообразии такую константу естественно определять по отношению к функции $I(t) = t^{(n-1)/n}$ (см. [183], [121], [107]). Чтобы контролировать гауссовские хвосты липшицевых функционалов на метрическом пространстве, также определяют т.н. логарифмическую изопериметрическую константу по отношению к функции $I(t) = t\sqrt{\log t}$ ([172]). Существуют и дискретные аналоги изопериметрических констант и связанные с ними неравенства типа Чигера ([56], [170], [208]). Отметим, что Бузер [96], [97] нашел некоторое обращение неравенства Чигера.

Неравенство (4.3.12) было установлено Харди для (невероятностных) мер на $(0, +\infty)$ с плотностями $d\mu(x)/dx = x^{-r}$, $d\lambda(x)/dx = x^{-r+p}$ при $p > 1$, $r > 1$ с (оптимальной) постоянной $C = \frac{p}{r-1}$ (см. [44], [25]). Портнов [31] и Сысоева [41] получили обобщение этого результата как соотношение между нормами

$$\|g\|_{L^q(\mu)} \le C\, \|g'\|_{L^p(\lambda)}, \quad g(0) = 0, \tag{4.8.1}$$

с разными, но не любыми весами $W = d\mu(x)/dx$, $V = d\lambda(x)/dx$ (W явно определялось через V). В частности, из полученных ими соотношений вытекает упомянутая Теорема Б. Теорема 4.3.3 соответствует в (4.8.2) случаю $p = q$. Если $p \neq q$, то условия, при которых произвольные неотрицательные меры μ и λ на $(0, +\infty)$ подчиняются неравенству (4.8.1) с некоторой конечной постоянной C были найдены Мазья и Розиным [25], [189], а также при $p < q$ – Кокилашвили [17]. Отметим также, что многомерные неравенства типа Харди имеют вид

$$\|g\|_{L^p(M, W(x)dx)} \le C\, \|\nabla g\|_{L^p(M, V(x)dx)},$$

где M – область в $\mathbf{R}^n$, причем веса W и V являются (степенными) функциями от $dist(\partial M, x)$. Такие неравенства изучались многими авторами (см. [164], [230], [143]), однако, неясно, как они связаны с многомерными неравенствами типа Пуанкаре (в отличие от одномерных неравенств).

Теорема 4.4.1 доказана в [75], а теоремы 4.4.2 и 4.4.3 – в [81]. Различные верхние и нижние оценки для дисперсии $\mathrm{Var}(g(\xi))$ в терминах производной $g'(\xi)$, а также связанные с ними характеризации нормального и других распределений и приложения к центральной предельной теореме изучались, кроме уже отмеченных, в работах Утева, Какуллоса, Папатанасиу, Пападатоса [15], [42], [98]-[104], Чена, Лу [110]-[112], Удрэ, Перес-Абреу, Сургайлиса [153], [155], [156]. См. также работу Квапеня, Латалы и Олешкевича [166], где неравенства типа Хинчина–Кахана устанавливаются на основе неравенств типа Пуанкаре.

Теорема 4.5.1 доказана в [83] (там же отмечено и неравенство (4.5.19)). Теорема 4.5.2 приводится впервые.

Теорема 4.6.1, неравенство (4.6.10) и теорема 4.7.1 доказаны в [76], а неравенство (4.6.11) – в [5]. В [76] также изучалась связь между логарифмическими неравенствами типа Соболева и транспортной задачей.

Существует несколько различных подходов к доказательству гауссовского лофарифмического неравенства Гросса (см. [205], [49], [105], [176], [139]). Например, это неравенство можно рассматривать как следствие гауссовского изопериметрического неравенства [176], но, что интересно, его можно извлечь, и опираясь только на (формально заведомо более слабое) неравенство типа Пуанкаре для гауссовской меры. Такое наблюдение было сделано в [83], где были введены так называемые модифицированные логарифмические неравенства типа Соболева (т.е., (4.6.3) при дополнительном условии $|\nabla g| \leq \beta$ и с постоянной c, зависящей от β). Такие неравенства носят очень широкий характер и справедливы, например, если выполняется неравенство типа Пуанкаре. Кроме того, они оказываются полезным инструментом при изучении свойства концентрации продакт-мер на $\mathbf{R}^n$ (и, более общо, на абстрактных метрических пространствах) по отношению к операции расширения множеств $U(A) = A + hB_1 + \sqrt{h}B_2$.

Логарифмические неравенства типа Соболева известны и для некоторых негауссовских мер, например, для равномерного распределения на сфере (Мьюлер и Вайслер [194]). Следовательно на сфере также выполняются неравенства вида (4.6.8)–(4.6.9). Дискретные логарифмические неравенства типа Соболева изучались в [125], [208] (в связи с задачай о скорости сходимости марковских цепей к стационарному распределению), см. также [140], [84]. Постоянная $\rho = 1/(2c)$ в (4.6.1) (если она оптимальна) называется логарифмической постоянной Соболева, и ее оцениванию посвящено уже много работ (см. напр. М.Ф.Чен и Ванг [114]).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Некоторые аналитические свойства изопериметрической функции равномерного распределения на сфере

Здесь мы докажем лемму 1.7.1 (а с ней и теорему 1.7.2), утверждающую, что функция

$$z(p) = \frac{p\,q}{I_{\sigma_n}(p)}, \quad q = 1 - p, \quad p \in (0,1),$$

вогнута. Как и ранее, I_{σ_n} обозначает изопериметрическую функцию равномерного распределения σ_n (то есть, нормированной меры Лебега) на n-мерной сфере $S^n(r) \subset \mathbf{R}^{n+1}$ радиуса $r > 0$. Согласно теореме П.Леви об изопериметрическом свойстве шаров на сфере, функция I_{σ_n} неявно записывается в виде (см. (1.7.4))

$$I_{\sigma_n}(p) = \sigma_n^+(B),$$

где B – (любой) шар на $S^n(r)$ меры $p = \sigma_n(B)$. Как обычно, σ_n^+ обозначает периметр в смысле σ_n по отношению к геодезическому (или, что эквивалентно, – евклидовому) расстоянию на $S^n(r)$.

Нам будет удобнее записать I_{σ_n} в другом виде. Обозначим через F_n функцию распределения случайной величины $x \to x_1$ (на вероятностном пространстве $(S^n(r), \sigma_n)$):

$$F_n(t) = \sigma_n(B_n(t)) \quad \text{при} \quad |t| < r,$$

где $B_n(t) = \big\{x \in S^n(r) : x_1 \leq t\big\}$. Обозначим через $F_n^{-1} : (0,1) \to (-r,r)$ обратную функцию, так что $I_{\sigma_n}(p) = \sigma_n^+\big(B_n\big(F_n^{-1}(p)\big)\big)$.

Через s_n будем всегда обозначать площадь поверхности $S^n(1)$.

Лемма 1. Пусть $n \geq 2$. Для всех $p \in (0,1)$

$$I_{\sigma_n}(p) = \frac{s_{n-1}}{s_n\, r^n} \big(r^2 - (F_n^{-1}(p))^2\big)^{(n-1)/2}. \qquad (1)$$

При этом, F_n имеет плотность

$$f_n(t) = \frac{s_{n-1}}{r^{n-1} s_n} \left(r^2 - t^2\right)^{(n-2)/2}, \quad |t| < r. \tag{2}$$

Например, при $n = 2$ имеем $f_2(t) = \frac{1}{2r}$, $|t| < r$, так что F_2 – равномерное распределение на интервале $(-\frac{1}{2r}, \frac{1}{2r})$. В этом случае $I_{\sigma_2}(p) = \frac{\sqrt{pq}}{r}$, и, очевидно, функция $z(p) = r\sqrt{pq}$ вогнута. При $n \geq 3$ I_{σ_n} не имеет столь явного выражения.

Доказательство леммы 1. Обозначим через μ_n меру Лебега на $S^n(r)$, то есть, $\mu_n = r^n s_n \sigma_n$. По определению периметра, имеем:

$$\begin{aligned} I_{\sigma_n}(p) &= \liminf_{h \to 0^+} \frac{\sigma_n(B_n^h(t)) - \sigma_n(B_n(t))}{h} \\ &= \frac{1}{r^n s_n} \liminf_{h \to 0^+} \frac{\mu_n(B_n^h(t)) - \mu_n(B_n(t))}{h}, \end{aligned}$$

где $t = F_n^{-1}(p)$ и $B_n^h(t)$ – геодезическая h-окрестность $B_n(t)$. Последний нижний предел есть просто предел и представляет собой $(n-1)$-мерную площадь границы

$$\partial B_n(t) = \{x \in S^n(r) : x_1 = t\}.$$

Так как с точностью до двига $\partial B_n(t) = S^{n-1}(\rho)$ – $(n-1)$-мерная сфера радиуса $\rho = \sqrt{r^2 - t^2}$, то площадь границы равна $\rho^{n-1} s_{n-1}$, и мы приходим к (1).

Пусть $|t| < r$. Если $B_n^h(t)$ не есть вся сфера, то это снова шар $B_n(s)$ на сфере $S^n(r)$ с параметром $s \in (t, r)$, определяемым соотношением

$$r \arccos(t/r) - r \arccos(s/r) = h.$$

Следовательно, при $h \to 0^+$, т.е., при $s \to t^+$

$$h = \frac{r}{\rho}(s - t) + O((s-t)^2), \quad \rho = \sqrt{r^2 - t^2},$$

и значит

$$\begin{aligned} F_n(s) - F_n(t) &= \frac{\mu_n(B_n^h(t)) - \mu_n(B_n(t))}{r^n s_n} \\ &= \frac{\mu_{n-1}(S^{n-1}(\rho))h}{r^n s_n} + O(h^2) \\ &= \frac{\rho^{n-2} s_{n-1}(s-t)}{r^{n-1} s_n} + O((s-t)^2). \end{aligned}$$

Поэтому

$$f_n(t) = \lim_{s \to t^-} \frac{F_n(s) - F_n(t)}{s-t} = \frac{\rho^{n-2} s_{n-1}}{r^{n-1} s_n},$$

что совпадает с (2). Лемма 1 доказана.

В дальнейшем можно считать, что $r = 1$ и $n \geq 3$. В силу леммы 1, с точностью до множителя, зависящего от размерности, изопериметрическая функция меры σ_n имеет вид

$$I(p) = \left(1 - (F^{-1}(p))^2\right)^\tau, \quad 0 < p < 1, \tag{3}$$

где $F^{-1} : (0,1) \longrightarrow (-1,1)$ – обратная к функции распределения F с плотностью

$$F'(x) = d_\lambda (1 - x^2)^\lambda, \quad |x| < 1, \tag{4}$$

где d_λ – нормализующий множитель, причем

$$\tau = \frac{n-1}{2}, \quad \lambda = \frac{n-2}{2}. \tag{5}$$

Более общо, будем считать τ и λ произвольными неотрицательными числами, определяя функцию I в соответствии с (3)–(4).

Лемма 2. Если $1 \leq \lambda \leq \tau \leq \lambda + 1$, то функция

$$z(p) = \frac{pq}{I(p)}, \quad q = 1 - p,$$

вогнута на $(0,1)$.

Если τ и λ определены с помощью (5), то, ввиду условия $\lambda \geq 1$, лемма 2 дает утверждение леммы 1.7.1 при $n \geq 4$. Случай $n = 3$ будет рассмотрен отдельно.

Сформулируем свойство вогнутости функции z несколько в других терминах. При $\lambda \geq 0$ введем функцию

$$H_\lambda(x) = \int_0^x (s(1-s))^\lambda ds, \quad 0 \leq x \leq 1, \tag{6}$$

и выразим F через H_λ (делая ниже замену $t = 2s - 1$): при $|x| \leq 1$

$$F(x) = d_\lambda \int_{-1}^x (1-t^2)^\lambda \, dt = d_\lambda 2^{2\lambda+1} \int_0^{\frac{1+x}{2}} (s(1-s))^\lambda ds$$
$$= d_\lambda 2^{2\lambda+1} H_\lambda\Big(\frac{1+x}{2}\Big).$$

Следовательно, принимая во внимание тождество $1-F(x)=F(-x)$, имеем

$$z(F(x)) = \frac{F(x)\,(1-F(x))}{I(F(x))} = \frac{F(x)\,F(-x)}{(1-x^2)^\tau} = c\,\frac{H_\lambda(y)H_\lambda(1-y)}{y^\tau(1-y)^\tau},$$

где $y = \frac{1-x}{2}$, и $c > 0$ – постоянная, зависящая только от τ и λ. Дифференцирование по x дает

$$z'(F(x))F'(x) = \frac{c}{2}\ \frac{d}{dy}\left[\frac{H_\lambda(y)H_\lambda(1-y)}{y^\tau(1-y)^\tau}\right],$$

и применяя (4) с учетом того, что $1 - x^2 = 4y(1-y)$, получаем

$$z'(F(x)) = c\,(y(1-y))^{-\lambda}\ \frac{d}{dy}\left[\frac{H_\lambda(y)H_\lambda(1-y)}{(y(1-y))^\tau}\right], \tag{7}$$

где c снова зависит только от τ и λ.

Функция z, очевидно, симметрична относительно точки $\frac{1}{2}$, и при этом $z(0^+) = z(1^-) = 0$, $z'\big(\frac{1}{2}\big) = 0$. Поэтому вогнутость z на $(0,1)$ равносильна вогнутости z на $(0, \frac{1}{2})$, то есть, тому, что производная $z'(p)$ не возрастает на $(0, \frac{1}{2})$. Применяя (7), получаем следующее утверждение.

Лемма 3. Функция z вогнута на $(0,1)$ тогда и только тогда, когда функция

$$(x(1-x))^{-\lambda}\,\frac{d}{dx}\left[\frac{H_\lambda(x)H_\lambda(1-x)}{(x(1-x))^\tau}\right]$$

не возрастает на интервале $0 < x < \frac{1}{2}$.

Нам потребуются некоторые приготовления.

Лемма 4. При $\lambda \geq 1$ функция $U_\lambda(x) = \frac{H_\lambda(x)H_\lambda(1-x)}{(x(1-x))^{2\lambda+1}}$ не возрастает на $(0, \frac{1}{2}]$.

Лемма 5. При $\lambda \geq 0$ функция $V_\lambda(x) = \frac{H_\lambda(x)H_\lambda(1-x)}{(x(1-x))^{\lambda+1}}$ не убывает, а при $\lambda \geq 1$ функция $\frac{V'_\lambda(x)}{(x(1-x))^{\lambda-1}}$ не возрастает на $(0, \frac{1}{2}]$.

Заметим, что при $\lambda \geq 1$ второе утверждение этой леммы более сильное, чем первое, так как $V'_\lambda(\frac{1}{2}) = 0$. Первое утверждение леммы 5 будет использовано в доказательстве леммы 6 при $\lambda = \frac{1}{2}$.

Доказательство леммы 4. Делая в (6) замену $s = tx$, имеем

$$H_\lambda(x) = x^{\lambda+1} \int_0^1 (t(1-tx))^\lambda \, dt, \tag{8}$$

то есть, при $x > 0$ $\frac{H_\lambda(x)}{x^{2\lambda+1}} = \int_0^1 t^\lambda \left(\frac{1}{x} - t\right)^\lambda dt$, и поэтому

$$U_\lambda(x) = \int_0^1 t^\lambda \left(\frac{1}{x} - t\right)^\lambda dt \int_0^1 t^\lambda \left(\frac{1}{1-x} - t\right)^\lambda dt = T(u)T(v),$$

где $u = 1/x$, $v = 1/(1-x)$, $T(u) = \int_0^1 t^\lambda (u-t)^\lambda \, dt$. Заметим, что $(u-1)(v-1) = 1$, и что $u = u(x) \geq 2$ – убывает по $x \in (0, \frac{1}{2}]$. Меняя u на $u+1$ и v на $v+1$, приходим к тождеству

$$\frac{H_\lambda(x)H_\lambda(1-x)}{(x(1-x))^{2\lambda+1}} = S(u)S\left(\frac{1}{u}\right), \quad u = \frac{1}{x} - 1,$$

где $S(u) = T(u+1) = \int_0^1 (1-t)^\lambda (u+t)^\lambda \, dt = \int_0^1 (u+t)^\lambda p(t) \, dt$ с $p(t) = (1-t)^\lambda$. Требуется показать, что функция $S(u)S(1/u)$ возрастает на интервале $[1, +\infty)$. Запишем

$$\begin{aligned} S(u)S\left(\frac{1}{u}\right) &= \int_0^1\int_0^1 (u+t)^\lambda \left(\frac{1}{u} + s\right)^\lambda p(t)p(s) \, dtds \\ &= \iint\limits_{0<t<s<1} \left[(u+t)^\lambda \left(\frac{1}{u} + s\right)^\lambda + (u+s)^\lambda \left(\frac{1}{u} + t\right)^\lambda\right] p(t)p(s) \, dtds. \end{aligned}$$

Достаточно показать, что для всех $0 < t < s < 1$ функция

$$g(u) = (u+t)^\lambda \big(\frac{1}{u} + s\big)^\lambda + (u+s)^\lambda \big(\frac{1}{u} + t\big)^\lambda$$
$$= \Big((1+ts) + us + \frac{t}{u}\Big)^\lambda + \Big((1+ts) + ut + \frac{s}{u}\Big)^\lambda$$

возрастает на интервале $u \geq 1$. Дифференцируя,

$$\frac{g'(u)}{\lambda} = \Big((1+ts) + us + \frac{t}{u}\Big)^{\lambda-1} \Big(s - \frac{t}{u^2}\Big)$$
$$+ \Big((1+ts) + ut + \frac{s}{u}\Big)^{\lambda-1} \Big(t - \frac{s}{u^2}\Big),$$

и замечая, что $s - \dfrac{t}{u^2} > 0$, заключаем, что производная g' положительна тогда и только тогда, когда

$$\left[\frac{(1+ts) + us + \dfrac{t}{u}}{(1+ts) + ut + \dfrac{s}{u}}\right]^{\lambda-1} > -\frac{t - \dfrac{s}{u^2}}{s - \dfrac{t}{u^2}}.$$

Это неравенство справедливо, так как, в силу условий $0 < t < s$ и $u > 1$, правая часть этого неравенства меньше 1, выражение в квадратных скобках – больше 1, и степень $\lambda - 1 \geq 0$. Таким образом, лемма 4 доказана.

Положим $\kappa = x(1-x)$. В дальнейшем будем многократно использовать тождества

$$H'_\lambda(x) = \kappa^\lambda, \quad \big(H_\lambda(x)\, H_\lambda(1-x)\big)' = \big(H_\lambda(1-x) - H_\lambda(x)\big)\, \kappa^\lambda,$$

$$\kappa' = 1 - 2x, \quad (1-2x)^2 = 1 - 4\kappa.$$

Доказательство леммы 5. Начнем со второго утверждения, предполагая, что $\lambda \geq 1$. Имеем:

$$V_\lambda(x) = \frac{H_\lambda(x)\, H_\lambda(1-x)}{\kappa^{\lambda+1}}, \quad 0 < x < \frac{1}{2},$$

$$V'_\lambda(x) = \frac{H_\lambda(1-x) - H_\lambda(x)}{\kappa} - (\lambda+1)\, \frac{H_\lambda(x)\, H_\lambda(1-x)}{\kappa^{\lambda+2}}\, (1-2x),$$

$$\frac{V'_\lambda(x)}{\kappa^{\lambda-1}} = \frac{H_\lambda(1-x)-H_\lambda(x)}{\kappa^\lambda} - (\lambda+1)\,\frac{H_\lambda(x)\,H_\lambda(1-x)}{\kappa^{2\lambda+1}}\,(1-2x).$$

Еще раз дифференцируя и приводя подобные члены, для функции $u(x) = \kappa^{2\lambda+2}\big(V'_\lambda(x)/\kappa^{\lambda-1}\big)'$ получаем выражение

$$\begin{aligned} u(x) = {} & (\lambda+1)\big((2\lambda+1)(1-4\kappa)+2\kappa\big)H_\lambda(x)H_\lambda(1-x) \\ & - 2\,\kappa^{2\lambda+2} \\ & - (2\lambda+1)(H_\lambda(1-x)-H_\lambda(x))\,\kappa^{\lambda+1}(1-2x). \end{aligned}$$

Требуется показать, что функция u неположительна на $(0, \frac{1}{2})$. Так как $u(0) = 0$, то будет достаточно установить неравенство $u'(x) \le 0$ для всех $x \in (0, \frac{1}{2})$. Снова дифференцируем и приводим подобные члены:

$$\begin{aligned} u'(x) = & - (\lambda+1)(8\lambda+2)\,H_\lambda(x)H_\lambda(1-x)\,(1-2x) \\ & - 2\,\kappa^{2\lambda+1}\,(1-2x) \\ & + (6\lambda+4)(H_\lambda(1-x)-H_\lambda(x))\,\kappa^{\lambda+1}. \end{aligned}$$

То есть, в терминах функции

$$\begin{aligned} v(x) = \frac{u'(x)}{2(1-2x)} = & - (\lambda+1)(4\lambda+1)H_\lambda(x)H_\lambda(1-x) - \kappa^{2\lambda+1} \\ & + (3\lambda+2)\,\frac{H_\lambda(1-x)-H_\lambda(x)}{1-2x}\,\kappa^{\lambda+1} \end{aligned}$$

нужно установить неравенство $v(x) \le 0$ при $0 < x < \frac{1}{2}$.

Снова $v(0) = 0$, и значит достаточно показать, что $v'(x) \le 0$. После некоторого подсчета получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1-4\kappa}{\kappa^\lambda}\,v'(x) = {} & \big((4\lambda^2+6\lambda)\kappa - (\lambda^2-1)\big)\big(H_\lambda(1-x)-H_\lambda(x)\big) \\ & - \kappa^\lambda\big((2\lambda+1)-2\lambda\kappa\big)(1-2x). \end{aligned} \tag{9}$$

Отсюда сразу получаем, что $v'(x) \le 0$, если $\kappa \le \kappa_0 = \dfrac{\lambda^2-1}{4\lambda^2+6\lambda}$ (оба члена в правой части (9) неположительны). На дополнительном интервале $\kappa > \kappa_0$ рассмотрим функцию

$$w(x) = \big(H_\lambda(1-x)-H_\lambda(x)\big) - \kappa^\lambda\,\frac{(2\lambda+1)-2\lambda\kappa}{(4\lambda^2+6\lambda)\kappa-(\lambda^2-1)}\,(1-2x).$$

Если мы теперь покажем, что на этом интервале $w'(x) \geq 0$, то есть, что w не убывает, то поскольку $w\big(\frac{1}{2}\big) = 0$, получим, что функция w, а с ней и v', будут неположительны на этом интервале. Это завершит доказательство превого утверждения леммы.

Для упрощения записи введем функции

$$b = (2\lambda + 1) - 2\lambda\kappa, \quad c = (4\lambda^2 + 6\lambda)\kappa - (\lambda^2 - 1),$$

так что $w(x) = H_\lambda(1-x) - H_\lambda(x) - \kappa^\lambda \frac{b}{c}(1-2x)$, и заметим, что

$$b - c = (\lambda^2 + 2\lambda)\,\kappa(1 - 4\kappa). \tag{10}$$

Имеем с учетом того, что $b' = -2\lambda(1-2x)$, $c' = (4\lambda^2 + 6\lambda)(1-2x)$:

$$\begin{aligned} w'(x) = &- 2\kappa^\lambda - \lambda(1-4\kappa)\kappa^{\lambda-1}\frac{b}{c} + 2\kappa^\lambda\frac{b}{c} \\ &+ \kappa^\lambda(1-4\kappa)\frac{2\lambda}{c} + \kappa^\lambda(1-4\kappa)(4\lambda^2+6\lambda)\frac{b}{c^2}\,. \end{aligned}$$

Складывая первый и третий член с учетом (10) и записывая определение для b во втором члене, приходим к равенству

$$\begin{aligned} \psi(\kappa) &\equiv \frac{\lambda(1-4\kappa)}{c\kappa^{\lambda-1}}\,w'(x) \\ &= -(2\lambda+1) + (4\lambda+6)\,\kappa\Big(1+\frac{b}{c}\Big), \quad \kappa_0 < \kappa \leq \frac{1}{4}\,. \end{aligned}$$

Записывая $1+\frac{b}{c}$ в виде $2+\frac{b-c}{c}$ и снова применяя (10), получаем такое выражение для ψ:

$$\begin{aligned} \psi(\kappa) = &- (2\lambda+1) + 2(4\lambda+6)\,\kappa \\ &+ (4\lambda+6)(\lambda^2+2\lambda)(1-4\kappa)\,\frac{\kappa}{(4\lambda^2+6\lambda)\kappa - (\lambda^2-1)}\,. \end{aligned}$$

Дробь справа убывает по κ и поэтому может быть оценена снизу ее значением в точке $\kappa = \frac{1}{4}$, равным $\frac{1}{6\lambda+4}$. Следовательно

$$\psi(\kappa) \geq \psi_0(\kappa) = -(2\lambda+1) + 2(4\lambda+6)\,\kappa + \frac{(4\lambda+6)\,(\lambda^2+2\lambda)}{6\lambda+4}(1-4\kappa).$$

Очевидно, $\psi_0\big(\frac{1}{4}\big) = 2$, и так как ψ_0 линейна, будет достаточно проверить, что $\psi_0(\kappa_0) \geq 0$. Используя равенство $1-4\kappa_0 = \frac{6\lambda+4}{4\lambda^2+6\lambda}$, имеем:

$$\begin{aligned}\psi_0(\kappa_0) &= -(2\lambda+1) + 2(4\lambda+6)\,\frac{\lambda^2-1}{4\lambda^2+6\lambda} + \frac{(4\lambda+6)\,(\lambda^2+2\lambda)}{6\lambda+4}\,\frac{6\lambda+4}{4\lambda^2+6\lambda}\\ &= \frac{(\lambda-1)\,(\lambda+2)}{\lambda} \geq 0.\end{aligned}$$

Следовательно $w'(x) \geq 0$ для всех $x \in (0, \frac{1}{2})$, и первое утверждение леммы 5 доказано.

Перейдем к первому утверждению. Покажем, что функция

$$\begin{aligned}f(x) &= \kappa^{\lambda+2} V'_\lambda(x)\\ &= \big(H_\lambda(1-x) - H_\lambda(x)\big)\kappa^{\lambda+1} - (\lambda+1)\,H_\lambda(x)H_\lambda(1-x)\,(1-2x)\end{aligned}$$

неотрицательна на $[0, \frac{1}{2}]$. Легко видеть, что $f(0) = f\big(\frac{1}{2}\big) = 0$ и

$$g(x) \equiv \frac{f'(x)}{2} = (\lambda+1)\,H_\lambda(x)H_\lambda(1-x) - \kappa^{2\lambda+1}.$$

В частности, $\frac{g(x)}{\kappa^{\lambda+1}} = \frac{f'(x)}{2\kappa^{\lambda+1}} \to H_\lambda(1) > 0$ при $x \to 0^+$ (используем (8)), и значит $g(x) > 0$ при достаточно малых $x > 0$. Поэтому, чтобы доказать, что функция f неотрицательна на $(0, \frac{1}{2})$, достаточно показать, что на этом интервале уравнение $f'(x) = 0$, то есть, $g(x) = 0$ имеет не более одного корня. С учетом того, что $g(0) = 0$, достаточно будет показать, что функция g строго возрастает на интервале $[0, x_0]$ и строго убывает на $[x_0, \frac{1}{2}]$ при некотором $x_0 \in (0, \frac{1}{2})$. Имеем:

$$g'(x) = (\lambda+1)\,(H_\lambda(1-x) - H_\lambda(x))\,\kappa^\lambda - (2\lambda+1)\,(1-2x)\,\kappa^{2\lambda} > 0$$

тогда и только тогда, когда

$$h(x) = H_\lambda(1-x) - H_\lambda(x) - \frac{2\lambda+1}{\lambda+1}\,(1-2x)\,\kappa^\lambda > 0.$$

Покажем, что $h(x) > 0$ на некотором интервале $(0, x_0)$ и $h(x) < 0$ на $(0, \frac{1}{2})$. Снова дифференцируем:

$$\begin{aligned} h'(x) &= -2\kappa^\lambda - \frac{2\lambda+1}{\lambda+1}\left[-2\kappa^\lambda + \lambda(1-4\kappa)\kappa^{\lambda-1}\right] \\ &= -\frac{\lambda\kappa^{\lambda-1}}{\lambda+1}\left[-2\kappa + (2\lambda+1)(1-4\kappa)\right] \\ &= -\frac{2\lambda(4\lambda+3)\kappa^{\lambda-1}}{\lambda+1}\,(x-x_1)\,(x-x_2), \end{aligned}$$

где $x_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{4\lambda+3}}$, $x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{4\lambda+3}}$. Следовательно функция h строго убывает на $[0, x_1]$ и строго возрастает на $[x_1, \frac{1}{2}]$. Так как $h(0) = H_\lambda(1) > 0$ и $h\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, получаем требуемое свойство функции h. Лемма 5 доказана.

Доказательство леммы 3. Напомним, что $\kappa = x(1-x)$. Требуется показать, что функция

$$\kappa^{-\lambda}\frac{d}{dx}\left[\frac{H_\lambda(x)H_\lambda(1-x)}{\kappa^\tau}\right]$$

не возрастает на интервале $0 < x < \frac{1}{2}$. Положим $\alpha = \lambda - \tau + 1$, так что

$$\frac{H_\lambda(x)\,H_\lambda(1-x)}{\kappa^\tau} = \kappa^\alpha V_\lambda(x). \tag{11}$$

По условию $0 \le \alpha \le 1$ (заметим, что в приложении к случаю сферы, когда параметры λ и τ определяются соотношениями в (5), мы имеем $\alpha = \frac{1}{2}$). Дифференцируя (11), имеем:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{H_\lambda(x)H_\lambda(1-x)}{\kappa^\tau}\right] = \alpha\kappa^{\alpha-1}V_\lambda(x)\,(1-2x) + \kappa^\alpha V_\lambda'(x),$$

следовательно

$$\begin{aligned} \kappa^{-\lambda}\frac{d}{dx}\left[\frac{H_\lambda(x)H_\lambda(1-x)}{\kappa^\tau}\right] &= \alpha\,\frac{V_\lambda(x)}{\kappa^{\lambda+1-\alpha}}\;(1-2x) + \frac{V_\lambda'(x)}{\kappa^{\lambda-\alpha}} \\ &= \alpha\,U_\lambda(x)\,\frac{1}{\kappa^{1-\alpha}}\;(1-2x) + \frac{V_\lambda'(x)}{\kappa^{\lambda-1}}\,\frac{1}{\kappa^{1-\alpha}}\,. \end{aligned}$$

Функция справа не возрастает, так как, в силу лемм 4–5, все фигурирующие множители суть неотрицательные невозрастающие функции на $(0, \frac{1}{2}]$. Лемма 3 доказана.

Остается доказать следующее утверждение.

Лемма 6 (случай $n = 3$). Функция $z(p) = \frac{p\,(1-p)}{I_{\sigma_3}(p)}$ вогнута на $(0, 1)$.

Доказательство. В данном случае $\tau = \frac{n-1}{2} = 1$, $\lambda = \frac{n-2}{2} = \frac{1}{2}$. Положим $H(x) = H_{1/2}(x) = \int_0^x \sqrt{t(1-t)}\,dt$. Согласно леммы 3, требуется проверить, что функция

$$u(x) = \kappa^{-1/2}\,\frac{d}{dx}\,\Big[\,\frac{H(x)H(1-x)}{\kappa}\,\Big]$$

не возрастает на $(0, \frac{1}{2})$. Так как

$$\begin{aligned}\big(H(x)H(1-x)\,\kappa^{-1}\big)' = {} & (H(1-x) - H(x))\,\kappa^{-1/2} \\ & - H(x)H(1-x)\,\kappa^{-2}(1-2x),\end{aligned}$$

имеем: $u(x) = (H(1-x) - H(x))\,\kappa^{-1} - H(x)H(1-x)\,\kappa^{-5/2}(1-2x)$,

$$\begin{aligned}u'(x) = {} & -\,2\kappa^{-1/2} - 2(H(1-x) - H(x))\,\kappa^{-2}(1-2x) \\ & + 2H(x)H(1-x)\,\kappa^{-5/2} + \frac{5}{2}\,H(x)H(1-x)\,\kappa^{-7/2}(1-4\kappa).\end{aligned}$$

Умножая обе части этого равенства на $2\kappa^2$ и собирая коэффициенты при $H(x)H(1-x)\,\kappa^{-3/2}$, заключаем, что $u'(x) \leq 0$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{H(x)H(1-x)}{\kappa^{3/2}}\,(5 - 16\kappa) \leq 4\,\kappa^{3/2} + 4\,(H(1-x) - H(x))\,(1-2x). \quad (12)$$

В силу первого утверждения леммы 5 при $\lambda = \frac{1}{2}$, функция $V_{1/2}(x) = \frac{H(x)H(1-x)}{\kappa^{3/2}}$ не убывает на $(0, \frac{1}{2})$ и поэтому может быть оценена сверху ее значением в точке $x = \frac{1}{2}$, равным $8H\big(\frac{1}{2}\big)^2$. С другой стороны, в силу выпуклости функции $H(1-x)-H(x)$ на $(0, \frac{1}{2})$, функция $\frac{H(1-x)-H(x)}{1-2x}$ не возрастает на $(0, \frac{1}{2})$ и значит может быть оценена снизу ее значением в точке $x = \frac{1}{2}$, равным $\frac{1}{2}$. Следовательно,

$$(H(1-x)-H(x))\,(1-2x) = \frac{H(1-x)-H(x)}{1-2x}(1-4\kappa) \geq \frac{1}{2}(1-4\kappa).$$

Используя это оценки, заключаем, что (12) будет следовать из неравенства

$$8H\big(\frac{1}{2}\big)^2(5-16\kappa) \leq 4\,\kappa^{3/2} + 2\,(1-4\kappa).$$

Заметим, что $H\big(\frac{1}{2}\big) = \frac{1}{2}H(1) = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta = \frac{\pi}{16}$, то есть, достаточно установить неравенство

$$v(\kappa) = \frac{\pi^2}{32}(5-16\kappa) - 4\,\kappa^{3/2} - 2\,(1-4\kappa) \leq 0, \quad 0 \leq \kappa \leq \frac{1}{4}.$$

Имеем: $v'(\kappa) = -\frac{\pi^2}{2} + 8 - 6\,\kappa^{1/2} \geq v'\big(\frac{1}{4}\big) = \frac{10-\pi^2}{2} > 0$, следовательно функция v возрастает на $[0, \frac{1}{4}]$. Остается заметить, что $v\big(\frac{1}{4}\big) = \frac{\pi^2}{32} - \frac{1}{2} < 0$. Лемма 6 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бобков С.Г. Верхние функции и осциллирующие гауссовские процессы // Зап. научн. семин. ЛОМИ им. В.А. Стеклова АН СССР, т. 158 (1987), с. 5–13.

2. Бобков С.Г. О верхних функциях и осцилляциях гауссовских и родственных им случайных процессах // Дис. канд. физ.-мат. наук. Л., ЛГУ, 1988, 134 с.

3. Бобков С.Г. Изопериметрическое свойство многомерного показательного распределения и его приложения к случайным процессам, линейно порожденным независимыми величинами // 5-я Междунар. Вильнюсская конф. по теории вероятн. и математ. статистике. Тезисы докладов. Вильнюс, т. 2, 1989, с. 73–74.

4. Бобков С.Г. Изопериметрическая задача на прямой // Зап. научн. семин. ПОМИ им. В.А. Стеклова РАН, т. 216 (1994), с. 5–10.

5. Бобков С.Г. О неравенствах Гросса и Талаграна на дискретном кубе // Вестник Сыктывкарского университета, вып. 1 (1995), сер. 1, с. 12–19.

6. Бобков С.Г. Некоторые экстремальные свойства распределения Бернулли // Теор. вероятн. и ее примен., т. 41 (1996), N. 4, с. 877–884.

7. Бобков С.Г. О поведение гауссовской осцилляции на выпуклых множествах // Труды С.-Петебургского Матем. об-ва, т. 4 (1996), с. 4–30.

8. Бобков С.Г., Удрэ К. Характеризация гауссовских мер через изопериметрическое свойство полупространств // Зап. научн. семин. ПОМИ им. В.А. Стеклова РАН, т. 228 (1996), с. 31–38.

9. Богачев В.И. Гауссовские меры // М., Наука, Физматлит,

1997, 352 с.

10. Боровков А.А., Утев С.А. Об одном неравенстве и связанной с ним характеризации нормального распределения // Теор. вероятн. и ее примен., т. 28 (1983), с. 209–218.

11. Бураго Ю.Д., Мазья В.Г. Некоторые вопросы теории потенциала и теории функций для областей с нерегулярными границами // Зап. научн. семин. ЛОМИ им. В.А. Стеклова АН СССР, 3 (1967), 1–152.

12. Бураго Ю.Д., Залгаллер В.А. Геометрические неравенства // Л., Наука, 1980.

13. Галамбош Я. Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик // М., Наука, 1984.

14. Давыдов, Ю.А., Лифшиц М.А., Смородина Н.В. Локальные свойства распределений стохастических функционалов // М., Наука, Физматлит, 1995, 256 с.

15. Какуллос Т., Папатанасиу В., Утев, С.А. Еще одна характеризация нормального закона и связанное с ним доказательство центральной предельной теоремы // Теор. вероятн. и ее примен., т. 37 (1992), с. 648–657.

16. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ // М., Физматгиз, 1959.

17. Кокилашвили В.М. О неравенствах Харди в весовых пространствах // Сообщ. АН Груз.ССР, 96 (1979), с. 37–40.

18. Кронрод А.С. О функциях двух переменных // Успехи мат. наук, т. 5 (1950), с. 24–134.

19. Кудрявцев Л.Д. О полиномиальных следах и о модулях гладкости функций многих переменных // Труды Матем. инст. им. В.А. Стеклова АН СССР, т. 117, 1972.

20. Куратовский К. Топология. Т. 1-2 // М., Мир, 1966.

21. Лифшиц М.А. Гауссовские случайные функции // Киев, ТВиМС, 1995, 246 с.

22. Люстерник Л.А. Неравенство Брунна–Минковского для произвольных множеств // Докл. АН СССР, т. 3 (1935), с. 55–58.

23. Маргулис Г.А. Вероятностные характеристики графов с большой связностью // Проблемы передачи информации, т. 10 (1974), N. 2, с. 101–108.

24. Мазья В.Г. Классы областей и теоремы вложения для пространств функций // Докл. АН СССР. 133 (1960), 3, с. 527–530.

25. Мазья В.Г. Пространства С. Л. Соболева // Л., Изд-во ЛГУ, 1985.

26. Мильман В.Д. Бесконечномерная геометрия единичной сферы банахового пространства // Докл. АН СССР, 177 (1967), N. 3, с. 514–517.

27. Мильман В.Д. Спектр ограниченных непрерывных функций, заданных на единичной сфере B-пространства // Функ. анал. и его приложен., т. 3 (1969), N. 2, с. 67–79.

28. Мильман В.Д. Новое доказательство теоремы Дворецкого о сечениях выпуклых тел // Функ. анал. и его приложен., т. 5 (1971), N. 4, с. 28–37.

29. Мильман В.Д. Асимптотические свойства функций нескольких переменных, заданных на однородных пространствах // Докл. АН СССР, 199 (1971), N. 6, с. 1247–1250.

30. Мильман В.Д. О свойстве функций, заданных на бесконечномерных многообразиях // Докл. АН СССР, 200 (1971), N. 4, с. 781–784.

31. Портнов В.Р. Две теоремы вложения для пространств $L^{(1)}_{p,b}(\Omega \times R_+)$ и их применения // Докл. АН СССР, 155 (1964), N. 8, с. 761–764.

32. Прохоров Ю.В. О полиномах от нормально распределенных случайных величин // Теор. вероятн. и ее примен., т. 37 (1992), N. 4, с. 692–694.

33. Прохоров Ю.В. О многочленах от случайных величин, имеющих гамма-распределение // Теор. вероятн. и ее примен., т. 38 (1993), N. 1, с. 198–202.

34. Седов В.Н. Весовые пространства. Теорема вложения // Дифф. уравнения, 8 (1972), N. 8, с. 1452–1462.

35. Скороход А.В. Замечание о гауссовских мерах в банаховом пространстве // Теор. вероятн. и ее примен., т. 15 (1970), с. 519–520.

36. Соболев С.Л. О некоторых оценках, связывающих семейства функций, имеющих квадратично суммируемые производные // Докл. АН СССР, т. 1 (1936), 267–270.

37. Соболев С.Л. Об одной теореме функционального анализа // Матем. сборник, т. (4) 46 (1938), с. 471–497.

38. Соболев С.Л. Применения функционального анализа в математической физике // Л., изд-во ЛГУ им. А.А.Жданова, 1950. 3-е изд-ие: М., Наука, 1988.

39. Судаков В.Н. Геометрические проблемы теории бесконечномерных вероятностных распределений // Труды Матем. инст. им. В.А. Стеклова АН СССР, т. 141, 1976, 191 с.

40. Судаков В.Н., Цирельсон Б.С. Экстремальные свойства полупространств для сферически инвариантных мер // Зап. научн. семин. ЛОМИ им. В.А. Стеклова АН СССР, т. 41 (1974), с. 14–24.

41. Сысоева Ф.А. Обобщения одного неравенства Харди // Изв. ВУЗов, Матем., N. 6 (1965), с. 140–143.

42. Утев С.А. Вероятностные задачи, связанные с определенным интегро-дифференциальным неравенством // Сиб. Матем. ж., т. 30 (1989), N. 3, с. 182–186.

43. Федерер Г. Геометрическая теория меры // М., Наука, 1987.

44. Харди Г.Х., Литтлвуд J.E., Полиа Г. Неравенства // М.,

ИЛ, 1948.

45. Цирельсон Б.С. Естественная модификация случайных процессов и ее применения к рядам из независимых функций и к гауссовским мерам // Зап. научн. семин. ЛОМИ им. В.А.Стеклова АН СССР, т. 55 (1975), с. 35–63. Дополнение: там же, т. 72 (1977), с. 202–211.

46. Цирельсон Б.С. Геометрический подход к оценке максимального правдоподобия для бесконечномерного гауссовского сдвига I // Теор. вероятн. и ее примен., т. 27 (1982), с. 411–418; II: там же, т. 30 (1985), с. 820–828; III: там же, т. 31 (1987), с. 470–483.

47. Юринский, В. Экспоненциальные оценки для больших уклонений // Теор. вероятн. и ее примен., т. 19 (1974), с. 154–155.

48. Adams R.A. Sobolev Spaces // Pure and Applied Mathematics, vol. 65, Academic Press, New York / London, 1975.

49. Adams R.A., Clarke F.H. Gross's logarithmic Sobolev inequality: a simple proof // Amer. J. Math., 101 (1979), 1265–1270.

50. Ahlswede R., Bezrukov S.L. Edge isoperimetric theorems for integer point arrays // SFB "Diskrete Strukturen in der Mathematik", Bielefeld University, Preprint No. 067 (1994). To appear in: Applied Math. Letters.

51. Ahlswede R., Gács P., Körner J. Bounds on conditional probabilities with applications in multi-user communication // Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, 34 (1976), 157–177.

52. Ahlswede R., Katona G.O.H. Contributions to the Geometry of Hamming Spaces // Disc. Math., 17 (1977), 1–22.

53. Ahlswede R., Cai, N. General edge-isoperimetric inequalities // SFB "Diskrete Strukturen in der Mathematik", Bielefeld University, Preprint No. 090 (1994).

54. Aida S., Masuda T., Shigekawa I. Logarithmic Sobolev inequalties and exponential integrability // J. Func. Anal., 126 (1994), 83-101.

55. Aida S., Stroock D. Moment estimates derived from Poincaré and logarithmic Sobolev inequalities // Math. Research Letters, 1 (1994), 75–86.

56. Alon N. Eigenvalues and expanders // Combinatorica, 6 (1986), 83–96.

57. Alon N., Milman V.D. λ_1, isoperimetric inequalities for graphs, and superconcentrators // Comb. Theory, Ser. B, 38 (1985), 73–88.

58. Amir D., Milman V.D. Unconditional and symmetric sets in n-dimensional normed spaces // Israel J. of Math., 37 (1980), 3–20.

59. Artola M. Untitled and unpublished manuscript.

60. Aubin T. Problemes isoperimetriques et espaces de Sobolev // J. Diff. Geometry, 11 (1976), 573–598.

61. Aubin T. Non-linear Analysis on manifolds. Monge–Ampére equations // Springer-Verlag, Berlin, 1982.

62. Bakry D., Ledoux, M. Lévy-Gromov isoperimetric inequality for an infinite dimensional diffusion generator. // Invent. math., 123 (1996), 259–281.

63. Ball K. The reverse izoperimetric problem for Gaussian measure // Discrete Comput. Geom., 10 (1993), 411–420.

64. Beckner W. Inequalities in Fourier analysis // Ann. Math., 102 (1975), 159–182.

65. Beckner W. A generalized Poincaré inequality for Gaussian measures. // Proc. Amer. Math. Soc., 105 (1989), No. 2, 397–400.

66. Bérard P.H. Spectral geometry: Direct and inverse problems // Lecture Notes in Math., 1207 (1986), Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.

67. Bernstein A.J. Maximally connected arrays on the n-cube // SIAM J. Appl. Math., 15 (1967), 1485–1489.

68. Bhattacharya R.N., Rao R.R. Normal approximation and asymptotic expansions // Wiley & Sons, New York 1976.

69. Bobkov S.G. Isoperimetric inequality with uniform enlargement

for exponential distribution // Proc. of the Sixth International Vilnius Conf. on Probab. Theory and Math. Statistics, Vilnius, vol. 1, 1993, 39–40.

70. Bobkov S.G. Isoperimetric inequalities for distributions of exponential type // Ann. Probab., 22 (1994), 978–994.

71. Bobkov S.G. Extremal properties of half-spaces for log-concave distributions // Ann. Probab., 24 (1996), 35–48.

72. Bobkov S.G. A functional form of the isoperimetric inequality for the Gaussian measure // J. Func. Anal., 135 (1996), 39–49.

73. Bobkov S.G. Isoperimetric problem for uniform enlargement // Studia Math., 123 (1) (1997), 81–95.

74. Bobkov S.G. An isoperimetric inequality on the discrete cube, and elementary proof of the isoperimetric inequality in Gauss space // Ann. Probab., 25, No. 1 (1997), 206–214.

75. Bobkov S.G., Götze F. Discrete isoperimetric and Poincaré-type inequalities // "Diskrete Strukturen in der Mathematik", Bielefeld University, Preprint No. 086 (1996). Submitted to: Probab. Theory Rel. Fields.

76. Bobkov S.G., Götze F. Exponential integrability and transportation cost related to logarithmic Sobolev inequalities // "Diskrete Strukturen in der Mathematik", Bielefeld University, Preprint (1997). Submitted to: J. Func. Anal.

77. Bobkov S.G., Götze F. On moments of polynomials // Preprint (1997). Submitted to: Prob. Theory and its Appl.

78. Bobkov S.G., Houdré C. Some connections between isoperimetric and Sobolev-type inequalities // School of Mathematics, GaTech, Tech. Report No. 008 (1995). To appear in: Memoirs of the AMS, 1997.

79. Bobkov S.G., Houdré C. Variance of Lipschitz functions and isoperimetric problem for a class of product measures // Bernoulli, 2(3) (1996), 249–255.

80. Bobkov S.G., Houdré C. Isoperimetric constants for product prob-

ability measures // Ann. Probab., 25 (1997), No. 1, 184–205.

81. Bobkov S.G., Houdré C. Converse Poincaré-type inequalities for convex functions // Preprint (1995). To appear in: Statistics & Probability Letters.

82. Bobkov S.G., Houdré C. Dimension free weak type of concentration of measure // Preprint (1995). To appear in: Bernoulli.

83. Bobkov S.G., Ledoux M. Poincare's inequalities and Talagrand's concentration phenomenon for the exponential distribution // Probab. Theory Rel. Fields, 107 (1997), 383–400.

84. Bobkov S.G., Ledoux M. On modified logarithmic Sobolev inequalities for Bernoulli and Poisson measures // Preprint (1997). Submitted to: J. Func. Anal.

85. Bogachev V.I. On the integrability of Wiener functionals // Warwick Preprints: 14/1995.

86. Bollobás B., Leader I. Edge-isoperimetric inequalities in the grid // Combinatorica, 11 (1991), No. 4, 299–314.

87. Bonami, A. Étude des coefficients de Fourier des fonctions de $L^p(G)$ // Ann. Inst. Fourier, 20 (1970), 335–402.

88. Borell C. Convex measures on locally convex spaces // Ark. Math., 12 (1974), 239–252.

89. Borell C. The Brunn-Minkowski inequality in Gauss space // Invent. math., 30 (1975), 207–211.

90. Brascamp H.J., Lieb E.H. On extensions of the Brunn-Minkovski and Précopa-Leindler theorems, including inequalities for log-concave functions, and with an application to the diffusion equation // J. Funt. Anal., 22 (1976), 366–389.

91. Bourgain J. On the distribution of polinomials on high dimensional convex sets // Lecture Notes Math., 1469 (1991), 127–137.

92. Bourgain J., Kalai G. Influences of variables and threshold intervals under group symmetries. Preprint.

93. Bourgain J., Kahn J., Kalai G., Katznelson Y., Linial N. The

influence of variables in product spaces // Israel J. Math., 77 (1992), 55–64.

94. Bourgain J., Kalai G. Influences of variables and threshold intervals under group symmetries // Preprint.

95. Brothers J.E., Ziemer W.P. Minimal rearrangements of Sobolev functions // J. reine angew. Math., 384 (1988), 153–179.

96. Buser P. On Cheeger's inequality $\lambda_1 \geq h^2/4$ // Geometry of the Laplace operator, Proc. Sympos. Pure Math. (R. Osserman and A. Weinstein, eds.), vol. 36 (1980), 20–77, Amer. Math. Soc., Providence.

97. Buser P. A note on the isoperimetric constant // Ann. Sci. École Norm. Sup., (4) 15 (1982), 213–230.

98. Cacoullos T. On upper and lower bounds for the variance of a function of a random variable // Ann. Probab., 10 (1982), 799–809.

99. Cacoullos T. Dual Poincaré-type inequalities via the Cramer-Rao and the Cauchy-Schwarz inequalities and related characterizations // In: Statistical Data Analysis and Inference (Y.Dodge Ed.) (1989), 239–249, Elsevier.

100. Cacoullos T., Papadatos N., Papathanasiou V. Variance inequalitites for covariance kernels and applications to central limit theorem // To appear in: Ann. probab.

101. Cacoullos T., Papathanasiou V. On upper bounds for the variance of functions of random variables // Statist. Probab. Letters, 3 (1985), 175–184.

102. Cacoullos T., Papathanasiou V. Characterizations of distributions by variance bounds // Statist. Probab. Letters, 7 (1989), 351–356.

103. Cacoullos T., Papathanasiou V. Lower variance bounds and a new proof of the central limit theorem // J. Multivariate Anal., 43 (1992), 173–184.

104. Cacoullos T., Papathanasiou V. , Utev S.A. // Variational inequalities with examples and an application to the central limit theorem // Ann. Probab., 22 (1994), No. 2, 1607–1618.

105. Carlen E.A. Superadditivity of Fisher's information and logarithmic Sobolev inequalities // J. Func. Anal., 101 (1991), 194–211.

106. Chavel I. Eigenvalues in Riemannian Geometry // Academic Press, 1984.

107. Chavel I., Feldman, E. Modified isoperimetric constants, and large time heat diffusion in Riemannian manifolds // Duke Math. J., 64 (1991), 473–499.

108. Cheeger J. A lower bound for the smallest eigenvalue of the Laplacian // Problems in Analysis, Symposium in honor of S.Bochner. Princeton Univ. Press, Princeton, 1970, 195–199.

109. Chen L.H.Y. An inequality for the multivariate normal distribution. // J. Multivariate Anal., 12 (1982), 306–315.

110. Chen L.H.Y. Poincaré-type inequalities via stochastic integrals // Z. Wahrsch. Verw. Gebiete., 69 (1985), 251–277.

111. Chen L.H.Y., Lou J.H. Characterization of probability distributions by Poincaré-type inequalities // Ann. Inst. H.Poincaré, 23 (1987), No. 1, 91–110.

112. Chen L.H.Y., Lou J.H. A characterization of probability measures which admit Poincaré inequalities // National University of Singapore, Research Report No. 371, 1989.

113. Chen M.F. Trilogy of couplings and general formulas for lower bound of spectral gap // Proc. of the Symposium on Probability towards the Year 2000. Edited by L. Accardi and C. Heyde, Springer-Verlag, 1996.

114. Chen M.F., Wang F.Y. Estimates of logarithmic Sobolev constant (an improvement of Bakry–Emery criterion) // J. Func. Anal.,

115. Chernoff H. A note on an inequality involving the normal distribution // Ann. Probab., 9 (1981), 533–535.

116. Chevet S. Processus gaussiens et volumes mixtes // Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 36 (1976), 47–65.

117. Cirel'son B.S. [Tsirel'son, B.S.], Ibragimov I.A., Sudakov V.N. Norms of Gaussian sample functions // Proceedings of the Third Japan-

USSR Symposium on Probability Theory. Lecture Notes in Math., 550 (1976), 20–41, Springer, New York.

118. Clements G.F. Sets of lattice points which contain a maximal number of edges // Proc. Amer. Math. Soc., 27 (1971), No. 1, 13–15.

119. Clements G.F., Lindström, B. A generalization of a combinatorial theorem of Macaulay // J. Comb. Theory, 7 (1969), 230–238.

120. Courant R., Hilbert D. Methoden der mathematischen Physik // Berlin, Springer, 1937. English edition: Methods of Mathematical Physics. New York, Interscience, 1953, 1962.

121. Croke C.B. Some isoperimetric inequalities and eigenvalue estimates. // Ann. scient. Éc. Norm. Sup. , 13 (1980), 419–435.

122. Davies E.B., Simon B. Ultracontractivity and the heat kernel for Schrödinger operators and Dirichlet Laplacians // J. Funct, Anal., 59 (1984), 335–395.

123. Dembo A. Information inequalities and concentration of measure // Dept. of Electrical Engineering, Technion-Israel Institute of Technology, Haifa, Preprint (1996).

124. Dembo A., Zeitouni, O. Transportation approach to some concentration inequalities in product spaces // Dept. of Electrical Engineering, Technion-Israel Institute of Technology, Haifa, Preprint (1996).

125. Diaconis P., Saloff-Coste L. Logarithmic Sobolev inequalities for finite Markov chains // Ann. Appl. Probab., 6 (1996), No. 3, 695–750.

126. Ehrhard A. Symétrisation dans l'espace de Gauss// Math. Scand., 53 (1983), 281–301.

127. Ehrhard A. Inégalités isopérimétruques et intégrales de Dirichlet gaussiennes // Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 17 (1984), 317–332.

128. Federer H., Fleming W.H. Normal and integral currents // Ann. Math., 72 (1960), 458–520.

129. Fernique X. Intégrabilité des vecteurs gaussiens. C. R. Acad. Sci. Paris A, 270 (1970), 1698–1699.

130. Fiegel T., Lindenstrauss J., Milman V. The dimension of almost

spherical sections of convex bodies // Acta Math., 139 (1977), 53–94.

131. Frankl P., Füredi Z. A short proof for a theorem of Harper about Hamming spheres // Discrete Math., 34 (1981), 311–313.

132. Friedgut E., Kalai G. Every monotone graph property has a sharp threshold // To appear in: Proc. Amer. Math. Soc.

133. Friedrichs K. Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren und Anwendung auf die Spektralzerlegung von Differentialoperatoren //Math. Ann., 109 (1934), 465–487, 685–713.

134. Gagliardo E. Proprieta di alcune classi di funzioni in piu variabili. // Ricerche Mat., 7 (1958), 102–137.

135. Gromov M. Paul Lévy's isoperimetric inequality // Preprint I.H.E.S. (1980).

136. Gromov M. Isoperimetric inequalities in Riemannian manifolds. In the book: Milman, V.D., Schechtman, G. Asymptotic theory of finite dimensional normed spaces // Lecture Notes in Math. 1200 (1986), Springer, Berlin. Appendix I. 114–129.

137. Gromov M., Milman V. A topological application of the isoperimetric inequality // Amer. J. Math., 105 (1983), 843–854.

138. Gross L. Logarithmic Sobolev inequalities // Amer. J. Math., 97 (1975), 1061–1083.

139. Gross L. Logarithmic Sobolev inequalities and contractivity properties of semigroups // Varenna, 1992; Lecture Notes in Math., 1563 (1993), 54–88, Springer, Berlin.

140. Gross L., Rothaus O. Herbst inequalities for supercontractive semigroups // Preprint (1997).

141. de Haan L., Ridder G. Stochastic compactness of sample extremes // Ann. Probab., 7 (1979), No. 2, 290–303.

142. Hadwiger H. Vorlesungen über Ihalt, Oberflache und Isoperimetrie // Springer-Verlag, Berlin, 1957.

143. Hajłasz P. Pointwise Hardy inequalities // International Center for Theoretical Physics, Preprint IC No. 8 (1996).

144. Hajłasz P. Sobolev spaces on an arbitrary metric space // Potential Analysis, 5 (1996), 403–415.

145. Hajłasz P., Koskela P. Isoperimetric inequalities and imbedding theorems in irregular domains // To appear in: J. London Math. Soc.

146. Harper L.H. Optimal assignment of numbers to vertices // J. Soc. Ind. Appl. Math., 12 (1964), No. 1, 131–135.

147. Harper L.H. Optimal numbering and isoperimetric problems on graphs // J. Comb. Theor., 1 (1966), 385–393.

148. Hart S. A note on the edges of the n-cube // Discrete Math., 14 (1976), 157–163.

149. Hebey E. Sobolev spaces on Riemannian manifolds // Lecture Notes in Math., Springer-Varlag, Berlin Heidelberg, 1635 (1996).

150. Hebey E., Vaugon M. The best constant problem in the Sobolev embedding theorem for complete Riemannian maniflods // Duke Math. J., 79 (1995), No. 1, 235–279.

151. Hebey E., Vaugon M. Meilleures constantes dans le théoréme d'inclusion de Sobolev // Ann. Inst. Henri Poincaré, 13 (1996), No. 1, 57–93.

152. Heinonen J., Koskela P. Quasiconformal maps in metric spaces with controlled geometry // Preprint.

153. Houdré C. Comparison and deviation from a representation formula // Preprint (1997).

154. Houdré C., Kagan A. Variance inequalities for functions of Gaussian variables // J. Theor. Probability, 8 (1995), 23–30.

155. Houdré, C., Pérez–Abreu V. Covariance identities and inequalities for functionals on Wiener and Poisson spaces // Ann. Probab., 23 (1995), 400–419.

156. Houdré, C., Pérez–Abreu V., Surgailis D. Interpolation, Correlation Identities and Inequalities for Infinitely Divisible Variables // Preprint (1996).

157. Kahn J., Kalai G., Linial N. The influence of variables on Boolean

functions // Proc. 29th IEEE FOCS, IEEE, 58–80, 1988.

158. Katona, G.O.H. The Hamming-sphere has minimum boundary // Stidia Math. Sci. Hungar., 10 (1975), 131–140.

159. Klaassen C.A.J. On an inequality of Chernoff // Ann. Probab., 13 (1985), 966–974.

160. Kleitman D.J. On a combinatorial problem of Erdös // J. Comb. Theory, 1 (1986), 209–214.

161. Kleitman D.J., Krüger, M.M., Rothschild, B.L. Configurations maximizing the number of pairs of Hamming-adjacent lattice points // Studies in applied Math. 50 (1971), 115–119.

162. Koskela P., MacManus P. Quasiconformal mappings and Sobolev spaces // Preprint.

163. Kufner A. Imbedding theorems for general Sobolev weight spaces // Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Ser. III, 23 (1969), f. 2, 373–386.

164. Kufner A. Weighted Sobolev spaces // John Wiley & Sons, 1985.

165. Kufner A., Oldrich John, Fucik, S. Function spaces // Noordhoff Intern. Publishing and Publishing House of the Czechoslovak Academia of Sciences, Leyden - Prague,

166. Kwapień S., Latala R., Oleszkiewich K. Comparison of moments of sums of independent random variables and differential inequalities // J. Func. Anal. 136 (1996), No. 1, 258–268.

167. Kwapień S., Pycia M., Schachermayer W. A proof of a conjecture of Bobkov and Houdré // Preprint (1995).

168. Landau H.J., Shepp L.A. On the supremum of a Gaussian process // Sankhyá, Ser. A, 32 (1970), 369–378.

169. Latala R. A note on the Ehrhard inequality // Studia Math., 118 (2) (1996), 169–174.

170. Lawler G.F., Sokal A.D. Bounds on the L^2 spectrum for Markov chains and Markov processes: a generalization of Cheeger's inequality // Trans. Amer. Math. Soc., 309 (1988), No. 2, 557–580.

171. Ledoux M. Isopérimétrie et inégalités de Sobolev logarithmiques gaussiennes // C.R. Acad. Sci. Paris, 306 (1988), 79–82.

172. Ledoux M. A simple analytic proof of an inequality by P.Buser // Preprint.

173. Ledoux M. A heat semigroup approach to concentration on the sphere and on a compact Riemannian manifold // Geom. and Funct. Anal., 2 (1992), No. 2, 444–465.

174. Ledoux M. Semigroup proofs of the isoperimetric inequality in Euclidean and Gauss space // Bull. Sci. math., 118 (1994), 485–510.

175. Ledoux M. Remarks on logarithmic Sobolev constants, exponential integrability and bounds on the diameter // J. Math. of Kyoto Univ., 35 (1995), No. 2, 211–220.

176. Ledoux M. Isoperimetry and Gaussian Analysis // Ecole d'été de Probabilités de Saint-Flour (1994); Lecture Notes in Math., 1648 (1996), 165–294.

177. Ledoux M. On Talagrand's deviation inequalities for product measures // ESAIM Probability & Statistics, 1 (1996), 63–87.

178. Ledoux M. A short proof of the Gaussian isoperimetric inequality // Preprint (1996). To appear in: Proc. of Conf. "Multidimensional Probability", Oberwolfach, 1996.

179. Ledoux M., Talagrand, M. Probability in Banach Spaces (Isoperimetry and Processes) // Springer-Verlag, 1991.

180. Lévy P. Lecons d'analyse fonctionnelle // Gauthier Villars, Paris, 1922.

181. Lévy P. Problémes concrets d'analyse fonctionnelle // Gauthier Villars, Paris, 1951.

182. Lindsey J.H. Assignment of numbers to vertices // Amer. Math Monthly, 71 (1964), 508–516.

183. Li P. On the Sobolev constant and the p-spectrum of a compact Riemannian manifold // Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 13 (1980), 451–469.

184. Lou J.-H. On discrete analog of Poincaré-type inequalities and density representation // Preprint.

185. Marton K. A simple proof of the blowing-up lemma // IEEE Trans. Inform. Theory, IT-32 (1986), 445–446.

186. Marton K. Bounding $\bar{d}$-distance by informational divergence: a method to prove measure concentration // Ann. Probab., 24 (1996), No. 2, 857–866.

187. Maurey B. Espaces de Banach: Construction de suites symétriques // C. R. Acad. Sc. Paris, Ser. A-B, 288 (1979), A679–681.

188. Maurey B. Some deviation inequalities // Geom. and Funct. Anal. , 1 (1991), 188–197.

189. Maz'ja V.G. Einbettungssätze für Sobolewsche Räume. Leipzig, Teubner-Texte zur Math. Teil I, 1979; Teil II, 1980.

190. Milman V.D. The concentration phenomenon and linear structure of finite dimensional normed space // Proceedings I.C.M., Berkeley (1986), 961–974.

191. Milman V.D. Dvoretzky's theorem – thirty years later // Geometric and Func. Anal., 2 (1992), No. 4, 455–479.

192. Milman V.D., Schechtman, G. Asymptotic theory of finite dimensional normed spaces // Lecture Notes in Math., 1200 (1986), Springer, Berlin.

193. Muckenhoupt B. Hardy's inequality with weights // Studia Math. , XLIV (1972), 31–38.

194. Mueller C., Weissler F. Hypercontractivity for the heat semigroup for ultraspherical polynomials and on the n-sphere // J. Func. Anal., 48 (1982), 252-283.

195. Nash J. Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations // Amer. J. Math., 80 (1958), 931–954.

196. Nirenberg L. On elliptic partial differential equations // Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 13 (1959), 116–162.

197. Oleszkiewich K., Pycia M. On certain characterization of normal

distribution // Statistics & Probability Letters, (1995), to appear.

198. Osserman R. The isoperimetric inequality // Bull. Amer. Math. Soc., 84 (1978), 1182–1238.

199. Papathanasiou V. Characterizations of multidimensional exponential families by Cacoullos-type inequalities // J. Multivariate Anal., 35 (1990), 840–850.

200. Papathanasiou V. Some characteristic properties of the Fisher information matrix via Cacoullos-type inequalities // J. Multivariate Anal., 44 (1993), 256–265.

201. Pelliccia E., Talenti G. A proof of a logarithmic Sobolev inequality // Calc. Var., 1 (1993), 237–242.

202. Pisier G. Probabilistic methods in the geometry of Banach spaces // Probability and Analysis, Varenna (Italy) 1985; Lecture Notes in Math., 1206 (1986), 167–241.

203. Pisier G. The volume of convex bodies and Banach space geometry // Cambridge Univ. Press, Tracts in Math, 1989.

204. Polya G, Szegö G. Isoperimetric inequalities in mathematical physics // Princeton Univ. Press, Princeton 27, 1951, 279 pp.

205. Rothaus O.S. Lower bounds for eigenvalues of regular Sturm-Liouville operators and the logarithmic Sobolev inequality // Duke Math. J., 45 (1978), No. 2, 351–362.

206. Rothaus O.S. Analytic inequalities, isoperimetric inequalities and logarithmic Sobolev inequalities // J. Func. Anal. 64 (1985), 296–313.

207. Rothaus O.S. Logarithmic Sobolev inequalities and the growth of L_p norms // Preprint (1994).

208. Saloff-Coste L. Lectures on finite Markov chains // CNRS & Université Paul Sabatier, UMR 55830, École d'été de probabilités de St Flour, 1996.

209. Schechtman G. Levy type inequalities for a class of metric spaces // Martingale Theory in Harmonic Analysis and Banach spaces, Springer-Verlag, 1981, 211–215.

210. Schmidt E. Die Brunn-Minkowskische Ungleichung und Ihr Spiegelbild sowie die isoperimetrishe Eigenschaft der Kugel in der euklidischen und nichteuklidischen Geometrie. I // Math. Nachr., 1 (1948), 81–157; II – Math. Nachr., 2 (1949), 171–244.

211. Schmuckenschläger M. Poincaré type inequalities and deviation inequalities // J.Kepler University, Linz, Preprint (1995).

212. Semmes S. Analysis on metric spaces // Preprint (1996).

213. Talagrand M. An isoperimetric theorem on the cube and the Khinchine-Kahane inequalities // Proc. Amer. Math. Soc., 104 (1988), 905–909.

214. Talagrand M. Isoperimetry and integrability of the sum of independent Banach space valued random variables // Ann. Probab., 17 (1989), 1546–1570.

215. Talagrand M. A new isoperimetric inequality for product measure and the tails of sums of independent random variables // Geom. and Funct. Anal., 1 (1991), 211–223.

216. Talagrand M. A new isoperimetric inequality and the concentration of measure phenomenon // Lecture Notes Math., 1469 (1991), 94–124.

217. Talagrand M. Isoperimetry, logarithmic Sobolev inequalities on the discrete cube, and Margulis' graph connectivity theorem // Geom. and Funct. Anal., 3 (1993), No. 3, 295–314.

218. Talagrand M. On Russo's approximate zero-one law // Ann. Probab., 22 (1994), No. 3, 1576–1587.

219. Talagrand M. Concentration of measure and isoperimetric inequalities in product spaces // Publications Mathématiques de l'I.H.E.S., 81 (1995), 73–205.

220. Talagrand M. A new look at independence // Ann. Probab., 24 (1996), No 1, 1–34.

221. Talagrand M. New concentration inequalities in product spaces // Invent. math., 126 (1996), 505–563.

222. Talagrand M. Transportation cost for Gaussian and other product measures // Geom. and Funct. Anal., to appear.

223. Talagrand M. On boundaries and influences // Preprint.

224. Talenti G. Osservazioni sopra una classe di disuguaglianze // Rond. Sem. Mat. e Fis. Milano, 39 (1969), 171–185.

225. Talenti G. Best Constant in Sobolev Inequality // Annali di Matematica. Pura ed Appliacata. 110 (1976), 353–372.

226. Talenti G. Some inequalities of Sobolev type on two-dimensional spheres // General Inequalities 5, 401–408. Edited by W. Walter, Birkhäuser, Basel 1987.

227. Tomaselli G. A class of inequalities // Boll. Un. Mat. Ital., 21 (1969), 622–631.

228. Vitale, R.A. The Will's functional and Gaussian processes // Ann. Probab., 24 (1996), No. 4, 2172–2178.

229. Wang D.L., Wang P. Extremal configurations on a discrete torus and a generalization of the generalized Macaulay theorem // Siam J. Appl. Math. 33 (1977), No. 1, 55–59.

230. Wannebo A. Hardy inequalities // Proc. Amer. Math. Soc., 109 (1990), 85–95.

231. Yau S.T. Isoperimetric constants and the first eigenvalue of a compact Riemannian manifold // Ann. Sci. Éc. Norm. Sup., 8 (1975), 487–507.

232. Cianchi A. A sharp form of Poincare inequalities on balls and spheres // J. Appl. Math, Phys. (ZAMP), 40 (1989), 558–569.