С. Г. Бобков, К. Удре

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ГАУССОВСКИХ МЕР ЧЕРЕЗ ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО ПОЛУПРОСТРАНСТВ

§1. Введение

Пусть μ — вероятностная мера на вещественной прямой $\mathbf{R}$; обозначим через μ^n ее n-ую степень в $\mathbf{R}^n$. Обозначим через A^h открытую h-окрестность множества $A \subset \mathbf{R}^n$, $h > 0$ (в смысле обычного евклидового расстояния), т.е., $A^h = \{x \in \mathbf{R}^n : \|x - a\|_2 < h$ для некоторого $a \in A\}$. Изопериметрическая задача для $(\mathbf{R}^n, \mu^n)$ заключается в минимизации значения

$$\mu^n(A^h), \tag{1.1}$$

когда A пробегает все борелевские подмножества меры $\mu^n(A) \geq p$, причем, значения $p \in (0,1)$ и $h > 0$ фиксированы.

Когда мера μ гауссовская, минимальное значение (1.1) достигается на любом полупространстве меры p, что может быть записано как изопериметрическое неравенство

$$\mu^n(A^h) \geq \mu^n(B^h), \tag{1.2}$$

где B — стандартное полупространство $\{x \in \mathbf{R}^n : x_1 \leq c\}$ μ^n-меры p, причем, c зависит только от p. Это глубокое свойство гауссовских мер было открыто В. Н. Судаковым и Б. С. Цирельсоном [7] и независимо К. Борелем [3], причем, их доказательства были основаны на изопериметрическом свойстве шаров на сфере (теореме Леви–Шмидта). Впервые изопериметрические методы были применены к гауссовским процессам Х. Ландау и Л. Шеппом в [7] при доказательстве экстремального свойства полупространств в несколько другой задаче, и ими также использовалась

При частичной поддержке Международного Научного Фонда, грант NXZ000–NXZ300, и Госкомитета РФ по высшему образованию, грант № 94-1.4-57.

Research supported in part by an NSF Postdoctoral Fellowship. This author enjoyed the hospitality of the Steklov Mathematical Institute (St. Petersburg branch) and of the Department of Mathematics, University of Syktyvkar, Russia, while part of this research was carried out.

теорема Леви–Шмидта. Другое доказательство изопериметрического неравенства (1.2), основанное на технике симметризации множеств в гауссовском пространстве, было позже дано А. Эраром в [4]. В данной заметке мы доказываем, что в классе всех продакт-мер только гауссовские меры удовлетворяют (1.2).

Теорема 1.1a. *Пусть $n \geq 2$. Если для всех $p \in (0,1)$ и $h > 0$, минимальное значение (1.1) достигается на стандартном полупространстве, то мера μ — гауссовская (возможно, μ — единичная масса в точке).*

Случай $n = 1$ существенно отличается от случая $n \geq 2$, так как на прямой многие интересные распределения удовлетворяют (1.2). Когда мера μ имеет непрерывную положительную плотность, необходимые и достаточные условия для (1.2) известны (см.[2], разд.13). В частности, μ должна быть симметрична относительно своей медианы и иметь конечный экспоненциальный момент. На самом деле, μ должна обладать этими двумя свойствами без каких-либо предположений о регулярности (Предложение 2.6 ниже). Более того, если μ симметрична и имеет конечный второй момент, то предположения теоремы 1.1a могут быть ослаблены.

Теорема 1.1b. *Пусть $n \geq 2$ и $p = 1/2$. Допустим, что вероятностная мера μ на прямой $\mathbf{R}$ симметрична относительно некоторой точки и имеет конечный второй момент. Если для всех $h > 0$ минимальное значение (1.1) достигается на стандартном полупространстве, то мера μ — гауссовская (возможно, μ — единичная масса в точке).*

Здесь следует отметить важную роль евклидового расстояния в этой характеризации. Например, если $\|x - a\|_2$ заменить в определении множеств A^h на супремум-расстояние $\|x - a\|_\infty$, то (1.2) выполняется для широкого класса логарифмически вогнутых распределений [1] (см.также [2], разд.15). В связи с т.н. феноменом концентрации меры, неравенства подобные (1.2) и при различных определениях расширения множеств изучались многими авторами (см. напр. М. Талагран [8], М. Леду [6]).

Очевидно, неравенство (1.2) становится сильнее, когда размерность n растет, поэтому, утверждения теорем 1.1a, b относятся по-существу к случаю плоскости ($n = 2$). Более того, в предположении теоремы 1.1b можно извлечь гауссовость из (1.2), если применить это неравенство к полуплоскости

$$A(t) = \left\{(x_1, x_2) : \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}} \le t\right\}, \quad t = 0.$$

Доказательство теоремы 1.1b. Действительно, пусть ξ и η — независимые случайные величины (с.в.), определенные на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, с общим распределением μ, симметричным относительно нуля. Тогда, минимальное значение правой части (1.2) при условии $\mu(B) \ge 1/2$ достигается на $B = \{x \in \mathbf{R}^2 : x_1 \le 0\}$ и равно $\mathbf{P}\{\xi < h\}$. Аналогично, минимальное значение левой части (1.2) при условии $\mu(A(t)) \ge 1/2$ достигается при $t = 0$. Так как $(A(t))^h = A(t+h)$, получаем $\mathbf{P}\{(\xi+\eta)/\sqrt{2} < h\} \ge \mathbf{P}\{\xi < h\}$ для всех $h > 0$. Поэтому,

$$\mathbf{D}\left(\frac{\xi+\eta}{\sqrt{2}}\right) = 4\int_0^{+\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\xi+\eta}{\sqrt{2}} > h\right\} h\,dh \le 4\int_0^{+\infty} \mathbf{P}\{\xi > h\}\, h\,dh = \mathbf{D}\,(\xi).$$

Но $\mathbf{D}\left((\xi+\eta)/\sqrt{2}\right) = \mathbf{D}\,(\xi)$, следовательно, для почти всех $h > 0$ (по отношению к мере Лебега) $\mathbf{P}\left\{(\xi+\eta)/\sqrt{2} > h\right\} = \mathbf{P}\left\{\xi > h\right\}$. Очевидно, это равенство распространяется на все $h > 0$, и, таким образом, с.в. $(\xi+\eta)/\sqrt{2}$ и ξ одинаково распределены. Следовательно, характеристическая функция f с.в. ξ удовлетворяет уравнению $f^2(t/\sqrt{2}) = f(t)$ при всех вещественных t. Легко видеть, что это уравнение характеризует гауссовские меры.

Теорема 1.1b доказана. Чтобы установить теорему 1.1a, мы исследуем одномерный случай и, в частности, показываем, что условие (1.2) влечет предположения теоремы 1.1b. Нам неизвестно, можно ли предположение о конечности второго момента в этой теореме исключить.

§2. Необходимые условия в случае $n = 1$

Введем некоторые обозначения. Пусть μ — вероятностная мера на вещественной прямой $\mathbf{R}$. Положим

$F(x) = \mu((-\infty, x])$, $x \in (-\infty, +\infty]$,

$\mathrm{Im}(F) = \{F(x) > 0 : x \in (-\infty, +\infty]\}$,

$S(F) = \{x \in (-\infty, +\infty] : F(y) < F(x)$ для всех $y < x\}$,

$F^{-1}(p) = \inf\{x \in (-\infty, +\infty] : F(x) \ge p\}$, $p \in (0, 1]$.

$F^{-1}(p)$ — минимальная квантиль F порядка p; так как функция распределения F непрерывна справа, инфимум в определении $F^{-1}(p)$ может быть заменен на минимум. В частности, для

$p \in \mathrm{Im}(F)$ $F^{-1}(p)$ — наименьшее решение уравнения $F(x) = p$. Таким образом, $F(F^{-1}(p)) \geq p$ для всех $p \in (0,1]$, и $F(F^{-1}(p)) = p$ для всех $p \in \mathrm{Im}(F)$. $S(F)$ (без точки $x = +\infty$) является подмножеством (замкнутого) носителя μ. Нетрудно видеть, что $\mu(S(F)) = 1$.

Лемма 2.1. *F — возрастающая биекция из $S(F)$ в $\mathrm{Im}(F)$, а сужение функции F^{-1} на $\mathrm{Im}(F)$ является обратным к этому отображению. Кроме того, функция F^{-1} непрерывна слева на $(0,1)$.*

Лемма 2.2. *Для всех $p \in (0,1]$*

a) $F(F^{-1}(p)) = p \iff p \in \mathrm{Im}(F)$;

b) $x \geq F^{-1}(p) \iff F(x) \geq p$ *для всех* $x \in (-\infty, +\infty]$;

c) $x \leq F^{-1}(p) \iff F(x) \leq p$ *для всех* $x \in S(F)$.

Обе леммы элементарны, и их доказательства опускаются. Пусть теперь F и G — функции распределения соответственно вероятностных мер μ и ν.

Лемма 2.3. *Отображение $U = G^{-1}(F)$ переводит μ в ν тогда и только тогда, когда $\mathrm{Im}(G) \subset \mathrm{Im}(F)$.*

Доказательство. Сузим U на $S(F)$. Пусть $p = F(x)$, $x \in S(F)$, $q = G(t)$, $t \in (-\infty, +\infty]$, так что $p \in \mathrm{Im}(F)$, $q \in \mathrm{Im}(G)$, следовательно, $q \in \mathrm{Im}(F)$. По лемме 2.2 b), c)

$$\begin{aligned} &U(x) = G^{-1}(F(x)) = G^{-1}(p) \leq t \\ &\qquad \iff G(t) \geq p \iff F(x) \leq q \iff x \leq F^{-1}(q). \end{aligned}$$

Поэтому, $\mu\{U \leq t\} = F(F^{-1}(q)) = q$, так как $q \in \mathrm{Im}(F)$. В обратную сторону утверждение очевидно.

Лемма 2.4. *Допустим, что для всех $p \in (0,1)$ и $h > 0$*

$$F(F^{-1}(p) + h) \leq G(G^{-1}(p) + h). \tag{2.1}$$

Тогда отображение $U = G^{-1}(F)$ переводит μ в ν, причем, для всех $x \in S(F)$ и $h > 0$

$$U(x + h) \leq U(x) + h. \tag{2.2}$$

Доказательство. Устремляя в (2.1) $h \to 0$, получаем

$$F(F^{-1}(p)) \leq G(G^{-1}(p)) \tag{2.3}$$

для всех $p \in (0,1)$. Поскольку $F(F^{-1}(1)) = G(G^{-1}(1)) = 1$, (2.3) выполняется также и при $p = 1$. Пусть $p \in \mathrm{Im}(G)$, тогда по лемме 2.2a), $G(G^{-1}(p)) = p$. Согласно (2.3) заключаем, что $F(F^{-1}(p)) \leq$

p. Но как уже отмечалось выше, всегда выполняется неравенство $F(F^{-1}(p)) \geq p$, и поэтому, $F(F^{-1}(p)) = p$. Снова по лемме 2.2a) получаем, что $p \in \mathrm{Im}(F)$. Таким образом, $\mathrm{Im}(G) \subset \mathrm{Im}(F)$, и в силу леммы 2.3, отображение U переводит μ в ν. Теперь возьмем произвольное $x \in S(F)$. По лемме 2.1, $F^{-1}(F(x)) = x$. Применяя (2.1) к $p = F(x)$, получаем.

$$F(x+h) \leq G(U(x)+h).$$

Так как $F(x+h) \geq F(x) > 0$, а функция G^{-1} неубывающая,

$$U(x+h) \leq G^{-1}(G(U(x)+h)).$$

Остается показать, что $G^{-1}(G(U(x)+h)) \leq U(x)+h$. Сначала отметим, что $G^{-1}(G(y)) \leq y$ для всех y, таких что $G(y) > 0$. Кроме того, в случае $y = U(x)+h$, имеем $G(y) \geq G(U(x)) = G(G^{-1}(F(x))) \geq F(x) > 0$, так как $G(G^{-1}(p)) \geq p$ для всех $p \in (0,1]$, и так как F положительна на $S(F)$. Лемма 2.4 доказана.

Обозначим через $m_p(\cdot)$ минимальную квантиль с.в. порядка p. Теперь мы можем установить

Предложение 2.5. *Для с.в. ξ и λ неравенство*

$$\mathbf{P}\{\lambda \leq m_p(\lambda)+h\} \geq \mathbf{P}\{\xi \leq m_p(\xi)+h\} \tag{2.4}$$

выполняется для всех $p \in (0,1)$ и $h > 0$ тогда и только тогда, когда существует липшицева, неубывающая функция U из $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}$ (сжатие), такая что с.в. λ и $U(\xi)$ одинаково распределены.

Доказательство. Допустим, что выполняется (2.4), т.е. выполняется (2.1) для функций распределений F и G с.в. ξ и λ, соответственно. По лемме 2.4 отображение $U = G^{-1}(F)$, суженное на $S = S(F)\setminus\{+\infty\}$, переводит распределение с.в. ξ в распределение с.в. λ (напомним, что $\mathbf{P}\{\xi \in S\} = 1$). U не убывает и, согласно (2.3), U конечна и липшицева на S, с липшицевой (полу-)нормой $K \leq 1$. По теореме Кирзбрауна–МакШейна (Хана–Банаха), U может быть продолжена на всю числовую прямую без увеличения липшицевой нормы K. Более того, такое продолжение может быть построено как неубывающая функция. Действительно, по непрерывности U продолжается единственным образом на замыкание $clos(S)$, так что можно считать, что U липшицева и неубывающая на $clos(S)$. Дополнение $T \doteq \mathbf{R}\setminus clos(S)$ открыто и, поэтому, может быть представлено в виде объединения не более, чем счетного числа взаимно непересекающихся открытых интервалов. Если (a,b) — конечный интервал из этого представления для T, то определим U на (a,b) линейно, так чтобы $U(a^+) = U(a)$, $U(b^-) = U(b)$. Если интервал (a,b) бесконечен, например, если $b = +\infty$, то положим $U(x) = U(a) + K(x-a)$ для всех $x > a$. Подобным образом доопределим U и в случае, когда $a = -\infty$. Очевидно, такое продолжение U представляет собой липшицеву, неубывающую функцию на всей числовой прямой. Доказательство обратного утверждения элементарно.

Наконец, докажем

Предложение 2.6. *Пусть вероятностная мера μ на вещественной прямой $\mathbf{R}$ такова, что* (1.1) *достигает свое минимальное значение на интервалах вида $A = (-\infty, x]$ для всех $p \in (0,1)$ и $h > 0$. Тогда μ симметрична относительно своей медианы и имеет конечный экспоненциальный момент.*

Доказательство. Если записать (1.2) для минимальных интервалов $A = [a, +\infty)$, $B = (-\infty, x]$ меры $\geq p$, то мы получим (2.4) для с.в. ξ и $\lambda = -\xi$ в предположении, что ξ имеет распределение μ. В силу предложения 2.5, найдется неубывающая, липшицева функция U, такая что с.в. λ и $U(\xi)$ одинаково распределены. Тогда одинаково распределенными будут с.в. λ и $V(\lambda)$, где функция $V(x) = U(-x)$ тоже липшицева (но невозрастающая). Пусть λ' — независимая копия λ. Так как $|V(\lambda') - V(\lambda)| \leq |\lambda' - \lambda|$, и обе стороны этого неравенства представляют собой одинаково распределенные с.в., заключаем, что $|V(x) - V(y)| = |x - y|$ для почти всех (x,y) по отношению к продакт-мере $\nu \otimes \nu$, где ν - распределение λ. По теореме Фубини найдется такая точка y_0, что $|V(x) - V(y_0)| = |x - y_0|$ для ν-почти всех x. Поэтому, с учетом того, что V не возрастает, заключаем, что для некоторого a, $V(x) = -x - 2a$ для ν-почти всех x. То есть, распределение с.в. $\lambda + a$ и, следовательно, распределение с.в. $\xi - a$ симметричны относительно нуля.

Чтобы доказать экспоненциальную интегрируемость, допустим, что мера μ невырождена, симметрична относительно нуля и, что значения инфимумов в выражении

$$R_h(p) = \inf_{\mu(A) \geq p} \mu(A^h), \quad 0 < p < 1, \quad h > 0, \tag{2.5}$$

достигаются на интервалах $A = (-\infty, x]$, где $x = F^{-1}(p)$, а F — функция распределения меры μ. Поскольку в этом случае $A^h =$

$(-\infty, x+h)$, имеем $R_h(p) = F(F^{-1}(p)+h-0)$. Покажем, что для всех $h > 0$ и $0 < p, q < 1$, таких что $p+q < 1$,

$$R_h(p+q) \le R_h(p) + R_h(q). \tag{2.6}$$

Действительно, пусть $A = (-\infty, x]$ — экстремальное множество в (2.5) для p, и так как μ симметрична, можно взять множество вида $B = [y, \infty)$ в качестве экстремального для q (с максимально возможным значением y). Предположение $p+q<1$ влечет $x \le y$. Случай $x = y$ возможен, но тогда $A \cup B = \mathbf{R}$, следовательно,

$$R_h(p) + R_h(q) = \mu(A^h) + \mu(B^h) \ge \mu(A) + \mu(B) \ge 1,$$

и поэтому (2.6) выполняется. В случае $x < y$ множество $A \cup B$ имеет меру $p+q$, и в силу тождества $(A\cup B)^h = A^h \cup B^h$ получаем

$$R_h(p+q) \le \mu((A\cup B)^h) \le \mu(A^h) + \mu(B^h) = R_h(p) + R_h(q).$$

Используя (2.6), покажем теперь, что $\liminf_{p\to 0+} R_h(p)/p > 1$ для всех достаточно больших $h > 0$. Действительно, допустим, что этот $\liminf = 1$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ множество E_ε всех точек $p \in (0,1)$, удовлетворяющих неравенству $R_h(p) \le (1+\varepsilon)p$, будет бесконечно, и, более того, 0 будет предельной точкой для E_ε. Поэтому, для любого $p \in (0,1)$ можно выбрать последовательность $p_n \in E_\varepsilon$ (допускается, чтобы некоторые члены в этой последовательности совпадали), такую что $r_n = p_1 + \cdots + p_n \to p$ при $n \to \infty$. Применяя (2.6) к r_n, получаем, что

$$R_h(r_n) \le R_h(p_1) + \cdots + R_h(p_n) \le (1+\varepsilon)(p_1 + \cdots + p_n) \le (1+\varepsilon)p.$$

Устремляя $n \to \infty$ и используя непрерывность функции R_h слева (здесь можно воспользоваться последним утверждением в лемме 2.1), приходим к неравенству $R_h(p) \le (1+\varepsilon)p$, справедливому уже при всех p. Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, имеем $R_h(p) \le p$, следовательно, $R_h(p) = p$, для всех $p \in (0,1)$. Но при достаточно больших h это равенство невозможно. Действительно, так как мера μ невырождена, можно взять $x, y \in \mathbf{R}$, такие что $0 < F(x) < F(y)$, и тогда $R_h(p) > p$ при $p = F(x)$ и $h > y - F^{-1}(p)$.

Таким образом, можно найти $h > 0$, $p_0 \in (0,1)$, $c > 1$, такие что $R_h(p) = F(F^{-1}(p)+h-0) \ge cp$ для всех $p \in (0, p_0]$ (необходимо, чтобы $cp_0 \le 1$). Следовательно, $F(F^{-1}(p)+2h) \ge cp$. Вычисляя значение F^{-1} от обеих частей, получаем (с учетом того, что $F^{-1}(F(x)) \le x$ при $F(x) > 0$) неравенство $F^{-1}(cp) - F^{-1}(p) \le 2h$. В частности, $F^{-1}(c^k p) - F^{-1}(c^{k-1}p) \le 2h$ для всех $k = 1, \cdots, n$ при условии $c^{n-1}p \leq p_0$. Суммируя по всем k, получаем $F^{-1}(c^n p) - F^{-1}(p) \leq 2nh$. Подставляя сюда значение $p = p_0 c^{-n}$, приходим к неравенству

$$F^{-1}(p_0 c^{-n}) \geq -2nh + F^{-1}(p_0),$$

справедливому для всех n. Отсюда легко получить оценку вида $F(x) \geq \exp(ax)$, где $a > 0$, а $x \to -\infty$.

Литература

1. S. G. Bobkov, *Extremal properties of half-spaces for* log-*concave distributions.* — Ann. Probab. (to appear).
2. S. G. Bobkov, C. Houdré, *Some connections between Sobolev-type inequalities and isoperimetry.* Preprint, 1995.
3. C. Borell, *The Brunn–Minkowski inequality in Gauss space.* — Invent. Math. **30** (1975), 207–211.
4. A. Ehrhard, *Symétrisation dans l'espace de Gauss.* — Math. Scand. **53** (1983), 281–301.
5. H. J. Landau, L. A. Shepp, *On the supremum of a Gaussian process.* — Sankhyá Ser. A **32** (1970), 369–378.
6. M. Ledoux, *Isoperimetry and Gaussian analysis.* École d'été de Probabilités de Saint-Flour. Preprint, 1994.
7. В. Н. Судаков, Б. С. Цирельсон, *Экстремальные свойства полупространств для сферически инвариантных мер.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **41** (1974), 14–24.
8. M. Talagrand, *Concentration of measure and isoperimetric inequalities in product spaces.* Preprint, 1994.

Bobkov S. G., Houdré C. Characterization of Gaussian measures by the isoperimetric property of half-spaces

If the half-spaces of the form $\{x \in \mathbf{R}^n : x_1 \leq c\}$ are extremal in the isoperimetric problem for the product-measure μ^n, $n \geq 2$, then the marginal distribution μ is Gaussian.

Сыктывкарский университет,
Сыктывкар, Россия
Georgia Institute of Technology,
Atlanta, USA

Поступило 12 декабря 1995г.