ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

**Февраль 2010** **Выпуск 45. С. 3-14**

С. Г. Бобков
Университет Миннесоты, США
bobko001@umn.edu

# ВОЗМУЩЕНИЯ ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКОГО НЕРАВЕНСТВА ГАУССА

*Выводится изопериметрическое неравенство гауссова типа для класса вероятностных мер в евклидовом пространстве, с логарифмически вогнутыми плотностями, возмущенными относительно обычной гауссовой меры. Библиография*: 23 *назв.*

## 1. Введение

Обозначим через $\gamma_n$ обычную гауссову меру в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ с плотностью

$$\frac{d\gamma_n(x)}{dx} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\, e^{-|x|^2/2}, \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

Гауссово изопериметрическое неравенство утверждает, что для любых измеримого множества $A \subset \mathbf{R}^n$ и числа $h > 0$

$$\gamma_n(A^h) \geqslant \Phi\left(\Phi^{-1}(\gamma_n(A)) + h\right), \tag{1.1}$$

где

$$A^h = \{x \in \mathbf{R}^n : \exists y \in A,\ |x-y| < h\}$$

обозначает открытую $h$-окрестность $A$ (относительно евклидова расстояния). Здесь и ниже мы используем обычные обозначения

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}, \quad \Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(y)\, dy \quad (-\infty \leqslant x \leqslant +\infty),$$

для маргинальной плотности и маргинальной функции распределения для $\gamma_n$ с обратной функцией $\Phi^{-1} : [0,1] \to [-\infty, +\infty]$.

Другими словами, среди всех подмножеств $A$ пространства $\mathbf{R}^n$ фиксированной меры $t = \gamma_n(A)$ значение $\gamma_n(A^h)$ доставляет минимум на полупространствах меры $t$.

Полагая $h \to 0$ в (1.1), в пределе получаем эквивалентное изопериметрическое неравенство, которое можно записать в виде

$$\gamma_n^+(A) \geqslant I(\mu(A)), \tag{1.2}$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке NSF.

где

$$\gamma_n^+(A) = \liminf_{h \to 0} \frac{\gamma_n(A^h) - \gamma_n(A)}{h}$$

обозначает гауссов периметр $A$ и

$$I(t) = \varphi(\Phi^{-1}(t)), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

обозначает изопериметрический профиль (называемый также изопериметрической функцией или минимизирующей площадь функцией) для меры $\gamma_n$.

Неравенство (1.1) получили в середине 1970-х гг. Судаков и Цирельсон [**1**], и независимо Борелль [**2**]. Оказалось, что это неравенство имеет фундаментальное значение в теории гауссовых случайных процессов, и поэтому неудивительно, что в течение многих лет этот результат привлекает внимание исследователей. На сегодняшний день имеется несколько различных доказательств неравенства (1.1). Мы кратко остановимся на них.

1. Оригинальное доказательство в [**1**] и [**2**] основано на изопериметрическом свойстве шаров на сфере (теорема Леви и Шмидта).
2. Доказательство, основанное на неравенстве типа Брунна — Минковского, принадлежит Эрхрарду (см. [**3**]–[**7**]).
3. Доказательство, основанное на теории полугрупп и использующее операторы Орнштейна — Уленбека [**8, 9**].
4. Доказательство, основанное на специальной функциональной форме изопериметрического неравенства на дискретном кубе [**10**].
5. Доказательство, основанное на лемме локализации Ловаша — Симоновича [**11**].

При некоторых подходах можно включать в (1.1)–(1.2) различные негауссовы вероятностные меры. В частности, как было установлено в [**8**], имеет место аналогичное изопериметрическое неравенство гауссова типа

$$\mu(A^h) \geqslant \Phi\left(\Phi^{-1}(\mu(A)) + h\right) \tag{1.3}$$

для любой вероятностной меры $\mu$ на $\mathbf{R}^n$ с логарифмически вогнутой плотностью относительно $\gamma_n$. Эквивалентно, справедливо такое же утверждение, когда $\mu$ имеет плотность вида

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = e^{-\frac{1}{2}|x|^2 - v(x)}, \quad x \in \Omega, \tag{1.4}$$

где $v : \Omega \to \mathbf{R}$ — выпуклая функция, определенная на открытом (ограниченном или неограниченном) выпуклом множестве $\Omega$ в $\mathbf{R}^n$. Другое доказательство этого результата содержится в [**11**]. С другой стороны, как показал Каффарелли [**12**], любая такая мера $\mu$ представляет сжатие (т.е. образ при липшицевом отображениии с липшицевой константой не более, чем 1) меры $\gamma_n$. Поэтому неравенство (1.3) для $\mu$ с логарифмически вогнутой плотностью относительно $\gamma_n$, также может быть получено из чисто гауссова случая (1.1).

## 2. Возмущения

Цель данной работы состоит в обобщении изопериметрического неравенства (1.3) на случай более общих вероятностных мер с возмущенными логарифмически вогнутыми плотностями относительно обычной гауссовой меры.

**Теорема 2.1.** *Пусть $\mu$ — вероятностная мера на открытом выпуклом множестве $\Omega$ в $\mathbf{R}^n$ с плотностью* (1.4), *где $v$ — непрерывная функция на $\Omega$ такая, что*

$$v^*(x) \leqslant v(x) \leqslant v^*(x) + c, \quad x \in \Omega, \tag{2.1}$$

*для некоторой выпуклой функции $v^*$ на $\Omega$ и некоторой константы $c \geqslant 0$. Тогда для любых измеримого множества $A \subset \mathbf{R}^n$ и $h > 0$*

$$\mu(A^h) \geqslant \Phi\left(\Phi^{-1}(\mu(A)) + e^{-c}h\right). \tag{2.2}$$

Это утверждение можно уточнить, рассмотрев различные функциональные формы для (2.2). В частности, справедливо следующее утверждение.

**Теорема 2.2.** *В условиях теоремы* 1.1 *для любой гладкой функции $f$ на $\mathbf{R}^n$ со значениями в* $[0,1]$

$$I(\mathbf{E}f) \leqslant \mathbf{E}\sqrt{I(f)^2 + e^{2c}\,|\nabla f|^2}. \tag{2.3}$$

Здесь $|\nabla f|$ обозначает евклидову длину градиента $f$ и ожидание

$$\mathbf{E}f = \int f\,d\mu$$

понимается относительно меры $\mu$. С помощью аппроксимации несложно обобщить неравенство (2.3) на класс всех локально липшицевых функций $f : \mathbf{R}^n \to [0,1]$ с обобщенным модулем градиента, определенным формулой

$$|\nabla f(x)| = \limsup_{y \to x} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|}, \quad x \in \mathbf{R}^n. \tag{2.4}$$

Такие функции дифферфенцируемы почти всюду, и во всех точках $x$ дифференцируемости of $f$ из (2.4) получаем обычное определение

$$|\nabla f(x)|^2 = \sum_{i=1}^n \Big|\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\Big|^2.$$

В силу элементарной оценки

$$\sqrt{a^2+b^2} \leqslant |a| + |b|, \quad (a, b \in \mathbf{R}),$$

из (2.3) получаем

$$I(\mathbf{E}f) - \mathbf{E}I(f) \leqslant e^c\,\mathbf{E}\,|\nabla f| \tag{2.5}$$

в таких же функциональных классах. Кроме того, при аппроксимации гладкими функциями $f$ индикаторных функций $1_A$ борелевских подмножеств евклидова пространства (2.5) превращается в изопериметрическое неравенство для $\mu$-периметра (как (1.2)),

$$\mu^+(A) \geqslant e^{-c}\,I(\mu(A)). \tag{2.6}$$

Последнее неравенство нетрудно “проинтегрировать” по параметру $h$ и получить (2.2) (см. подробности, например, в [**13, 14**]). Получить обратную импликацию также несложно, так что неравенства (2.2), (2.5) и (2.6) эквивалентны.

Однако функциональное неравенство (2.3) требует более тонкого обращения, и нет уверенности в том, что его можно получить на основе (2.2) в случае общих мер.

Основное преимущество функциональной формы (2.3) перед (2.2) заключается в его свойстве “тензоризации”. Именно (см. [**10**]), исходя из вероятностной меры $\mu$ на $\mathbf{R}^n$, которая удовлетворяет (2.3) при заданной непрерывной функции $I(t) \geqslant 0$, мы автоматически получаем более простое неравенство (т.е. (2.3) и тем самым (2.2), как следствие) для всех мер произведений

$$\mu^N = \mu \otimes \cdots \otimes \mu$$

на $\mathbf{R}^{nN}$ с такой же функцией $I$ и такой же константой $e^c$.

Другое преимущество (2.3) состоит в том, что здесь оно содержит в себе ряд канонических аналитических неравенств. Например, применяя его к функциям вида $\varepsilon f$ с ограниченной гладкой функцией $f \geqslant \varepsilon_0 > 0$ при $\varepsilon \to 0$ и используя асимптотику

$$I(t) \sim t\sqrt{2\log(1/t)}$$

при маылх значениях $t$, в пределе получаем

$$\mathbf{E} f \log f - \mathbf{E} f \, \log \mathbf{E} f \leqslant \frac{e^{2c}}{2} \, \mathbf{E} \, \frac{|\nabla f|^2}{f}.$$

С помощью простой аппроксимации можно обобщить это неравенство на случай произвольных гладких функций $f > 0$ на $\Omega$ с конечным $\mathbf{E} f$. Заменяя $f$ на $f^2$, получаем логарифмическое неравенство Соболева в стандартной форме

$$\mathbf{E} f^2 \log f^2 - \mathbf{E} f^2 \, \log \mathbf{E} f^2 \leqslant 2e^{2c} \, \mathbf{E} \, |\nabla f|^2, \tag{2.7}$$

которое справедливо в классе всех гладких функций $f$ на $\Omega$ с конечным вторым моментом $\mathbf{E} f^2$. (Фактически, если правая часть (2.7) конечна, то $\mathbf{E} f^2$ также конечно.)

Применяя (2.7) к $f + C$ при $C \to +\infty$, получаем неравенство типа Пуанкаре

$$\mathbf{E} f^2 - (\mathbf{E} f)^2 \leqslant e^{2c} \, \mathbf{E} \, |\nabla f|^2. \tag{2.8}$$

Это неравенство можно вывести непосредственно из функциональной формы (2.3) применением к функциям вида $t + \varepsilon f$, $t \in (0,1)$ произвольно фиксировано и $\varepsilon \to 0$ (в этом выводе следует воспользоваться тем, что гауссова изопериметрическая функция удовлетворяет дифференциальному уравнению $I''(t) = -1/I(t)$ при $0 < t < 1$).

В гауссовом случае $\mu = \gamma_n$ имеем $c = 0$, и в этом случае оба неравенства (2.7) и (2.8) хорошо известны (логарифмическое неравенство Соболева (2.7) получил Гросс [**15**]). В более общем случае имеем $c = 0$, когда $\mu$ логарифмически вогнута относительно $\gamma_n$, т.е. когда она имеет плотность

$$p(x) = e^{-\frac{1}{2}\,|x|^2 - v(x)}$$

с выпуклой $v$ [**8**]. В частности, в этом случае можно переписать (2.8) в виде

$$\frac{1}{2} \int (f(x) - f(y))^2 \, p(x) \, p(y) \, dx dy \leqslant \int \, |\nabla f|^2 \, p(x) \, dx. \tag{2.9}$$

Можно получить стандартными рассуждениями из (2.9) аналогичные неравенства типа Пуанкаре для возмущенных вероятностных мер. Именно, предположим, что $\nu$ имеет плотность

$$q(x) = e^{-\frac{1}{2}\,|x|^2 - v(x)},$$

где теперь функция $v$ не обязательно выпукла, но удовлетворяет условию (2.1) из теоремы 2.1. Тогда

$$1 \leqslant \int e^{-\frac{1}{2}\,|x|^2 - v^*(x)} \, dx \leqslant e^c,$$

откуда следует, что

$$p(x) = e^{-\frac{1}{2}\,|x|^2 - v^*(x) - c^*}$$

представляет плотность некоторой вероятностной меры, скажем $\mu$, где $c^* \in [0, c]$ — некоторая подходящая константа. Очевидно, что

$$e^{-c} \, q(x) \leqslant p(x) \, \leqslant e^c \, q(x)$$

для всех $x$, и, поскольку $p$ удовлетворяет (2.9), непосредственно получаем

$$\frac{e^{-2c}}{2} \int (f(x) - f(y))^2 \, p(x) \, p(y) \, dx dy \leqslant e^c \int \, |\nabla f|^2 \, p(x) \, dx.$$

Эквивалентно

$$\mathbf{E}_\nu f^2 - (\mathbf{E}_\nu f)^2 \leqslant e^{3c} \, \mathbf{E}_\nu \, |\nabla f|^2,$$

где ожидания берутся теперь по $\nu$. Однако, это неравенство слабее неравенства типа Пуанкаре (2.8).

Аналогичные рассуждения, использующие линеаризацию функционала энтропии (что также приводит к более плохому поведению константы, рассматриваемой как функции параметра $c$), можно применить для аналога логарифмического неравенства Соболева (2.7), если мы исходим из частного случая $c = 0$. Однако, по-видимому, нет никаких прямых доказательств вывода функционального неравенства (2.3) из такого же неравенства для класса вероятностных мер с логарифмически вогнутыми плотностями относительно $\gamma_n$. Поэтому потребуется иной подход для доказательств теорем 2.1 и 2.2. Мы отдельно рассмотрим одномерный случай в § 3. Затем мы опишем общий принцип локализации, который потребуется для сведения теоремы 2.2 к одномерному случаю, и завершим доказательство в § 4. В § 5 приведены некоторые элементарные вычисления с целью иллюстрации возмущенного изопериметрического неравенства.

## 3. Одномерный случай

В одномерном случае теорема 2.2 получается из гауссового случая в (2.3) при $\mu = \gamma_1$ и следующей леммы.

**Лемма 3.1.** *Пусть $\mu$ — вероятностная мера на открытом интервале $\Delta \subset \mathbf{R}$ с плотностью*

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = e^{-|x|^2/2 - v(x)},$$

*где $v$ — непрерывная функция на $\Delta$ такая, что*

$$v^*(x) \leqslant v(x) \leqslant v^*(x) + c, \quad x \in \Delta, \tag{3.1}$$

*с некоторой выпуклой функцией $v^* : \Delta \to \mathbf{R}$ и константой $c \geqslant 0$. Тогда $\mu$ является сжатием гауссовой меры на $\mathbf{R}$ с нулевым средним и отклонением $e^{2c}$.*

Очевидно, что наименьшее возможное значение $c$ в (3.1) дается формулой

$$c = \sup_{x \in \Delta} \, [v(x) - v^*(x)], \tag{3.2}$$

где $v^*$ — выпуклая оболочка $v$ на $\Delta$, т.е.

$$v^*(x) = \sup\{\ell(x) : \ell \text{ аффинная}, \ v \geqslant \ell \text{ на } \Delta\}, \quad x \in \Delta.$$

В силу леммы существует отображение $T : \mathbf{R} \to \Delta$ с константой Липшица $\|T\|_{\mathrm{Lip}} \leqslant e^c$, которое преобразует обычную гауссову меру $\gamma_1$ в меру $\mu$. Мы будем использовать одномерное неравенство (2.3) в случае $\mu = \gamma_1$ [**10**]. Тогда для любой локально липшицевой функции $u : \mathbf{R} \to [0,1]$

$$I\biggl(\int u \, d\gamma_1\biggr) \leqslant \int \sqrt{I(u)^2 + |u'|^2} \, d\gamma_1.$$

Применяя это неравенство к функции $u = f(T)$, где $f : \mathbf{R} \to [0,1]$ локально липшицева, и используя

$$|u'| \leqslant e^c \, |f'(T)|,$$

где $|u'|$ и $|f'|$ можно понимать в обобщенном смысле согласно определению (2.4), получаем

$$I\biggl(\int f(T) \, d\gamma_1\biggr) \leqslant \int \sqrt{I(f(T))^2 + e^{2c} \, |f'(T)|^2} \, d\gamma_1.$$

Так как распределение $f(T)$ для $\gamma_1$ совпадает с распределением $f$ для $\mu$, получаем

$$I\biggl(\int f \, d\mu\biggr) \leqslant \int \sqrt{I(f)^2 + e^{2c} \, |f'|^2} \, d\mu. \tag{3.3}$$

Это требуемое неравенство (2.3) из теоремы 2.2 при размерности 1.

**Доказательство леммы 3.1.** Прежде всего переформулируем условие (3.1). Оно эквивалентно следующему: для каждой точки $x_0 \in \Delta$, существует аффинная функция $\ell$ такая, что

(a) $v(x_0) = \ell(x_0)$,

(b) $v(x) \geqslant \ell(x) - c$ для всех $x \in \Delta$.

Действительно, предположим, что для каждой точки $x_0 \in \Delta$ существует аффинная функция $\ell = \ell_{x_0}$, обладающая свойствами (a)–(b). Тогда функция

$$v^*(x) = \sup_{x_0 \in \Delta} \, [\ell_{x_0}(x) - c]$$

выпукла и удовлетворяет (3.1).

Обратно, если верно (3.1), то в силу выпуклости $v^*$ для любой точки $x_0 \in \Delta$ существует аффинная функция $\ell^*$, касательная к $v^*$ в этой точке. Положим

$$\ell = \ell^* + c^*,$$

где $c^* = v(x_0) - v^*(x_0)$. Тогда $\ell$ — требуемая аффинная функция: $\ell(x_0) = v(x_0)$ и $\ell \leqslant v^* + c \leqslant v + c$ на $\Delta$.

Теперь запишем плотность $\mu$ в виде

$$q(x) = \varphi(x)\, e^{-v(x)}$$

(где новая функция $v$ отличается от исходной слагаемым) и обозначим через

$$F(x) = \mu((-\infty, x]) = \int_{-\infty}^{x} q(y)\, dy$$

соответствующую функцию распределения. Она строго возрастающая и непрерывна на носителе $\Delta = (a, b)$ меры $\mu$. Введем обратную функцию $F^{-1} : (0,1) \to \Delta$ и положим $q = 0$ во внешности $\Delta$.

Далее рассуждаем по аналогии с [**11**]. Заключение леммы 3.1 можно эквивалентным образом сформулировать как неравенство

$$q(F^{-1}(t)) \geqslant e^{-c} \varphi(\Phi^{-1}(t)) = e^{-c} I(t) \quad \text{для всех} \quad t \in (0,1).$$

В иной постановке, для заданных $x_0 \in \Delta$ и $t \in (0,1)$, если

$$\mu(-\infty, x_0) \geqslant t, \quad \mu(x_0, +\infty) \geqslant 1 - t, \tag{3.4}$$

то

$$q(x_0) \geqslant e^{-c} I(t). \tag{3.5}$$

Итак, зафиксируем точку $x_0 \in \mathbf{R}$ и число $t \in (0,1)$. Мы установим (3.5) для более широкого класса $M$ всех конечных положительных мер Бореля $\mu$ на вещественной прямой с плотностями

$$q(x) = \varphi(x) e^{-v(x)},$$

где $v : \mathbf{R} \to (-\infty, +\infty]$ — произвольная функция такая, что

$$\Delta = \{x \in \mathbf{R} : v(x) < +\infty\}$$

представляет открытый интервал, где $v$ непрерывна и удовлетворяет условиям (3.1) и (3.4). Заметим, что необходимым условием будет $x_0 \in \Delta$.

Наша цель — минимизировать $q(x_0)$ как функционал на $M$, т.е. найти или оценить снизу

$$\varkappa = \inf_{\mu \in M} q(x_0).$$

Введем подкласс $M_0 \subset M$ всех конечных положительных мер $\mu$ на вещественной прямой с плотностями

$$q(x) = \varphi(x)\, e^{-\ell(x)},$$

где $\ell$ аффинная, и положим

$$\varkappa_0 = \inf_{\mu \in M_0} q(x_0).$$

Теперь рассмотрим $\mu$ в $M$ с соответствующими $q$, $v$ и $\Delta$, и допустим, что (3.1) справедливо на интервале $\Delta$. Следовательно, существует аффинная функция $\ell$, обладающая свойствами (a)–(b). Рассмотрим меру $\overline{\mu}$ на вещественной прямой с плотностью

$$\overline{q}(x) = \varphi(x)\, e^{-(\ell(x) - c)}.$$

В силу свойства (b)

$$\overline{q}(x) \geqslant q(x) \quad \text{для всех } x \in \mathbf{R},$$

и поэтому $\overline{\mu}$ удовлетворяет (3.4), откуда $\overline{\mu} \in M_0$. В силу свойства (a)

$$\overline{q}(x_0) = e^c q(x_0).$$

Следовательно,

$$\varkappa \geqslant e^{-c} \varkappa_0.$$

Таким образом, для доказательства (3.5) и тем самым для доказательства леммы остается показать, что $\varkappa_0 \geqslant I(t)$.

Плотность любой меры $\mu \in M_0$ можно записать в виде

$$q(x) = A\varphi(x)e^{\lambda x} = Ae^{\lambda^2/2}\varphi(x-\lambda),$$

где $A > 0$ и $\lambda \in \mathbf{R}$ — некоторые константы. Так как

$$\int\limits_{-\infty}^{x_0} \varphi(x)e^{\lambda x}\,dx = e^{\lambda^2/2}\Phi(x_0-\lambda),$$

$$\int\limits_{x_0}^{+\infty} \varphi(x)e^{\lambda x}\,dx = e^{\lambda^2/2}(1-\Phi(x_0-\lambda)),$$

условие (3.4) принимает вид

$$Ae^{\lambda^2/2}\Phi(x_0-\lambda) \geqslant t, \quad Ae^{\lambda^2/2}(1-\Phi(x_0-\lambda)) \geqslant 1-t,$$

и при этом условии нам надо показать, что

$$q(x_0) = Ae^{\lambda^2/2}\varphi(x_0-\lambda) \geqslant I(t).$$

Эквивалентно, после замены $B = Ae^{\lambda^2/2}$, $y = x_0-\lambda$ нам надо показать, что

$$B\,\Phi(y) \geqslant t, \quad B\,(1-\Phi(y)) \geqslant 1-t \quad \Longrightarrow \quad B\varphi(y) \geqslant I(t).$$

Это в точности то же, что и неравенство

$$\max\left\{t\,\frac{\varphi(y)}{\Phi(y)},\ (1-t)\,\frac{\varphi(y)}{1-\Phi(y)}\right\} \geqslant I(t) \quad \text{для всех} \quad y \in \mathbf{R}. \tag{3.6}$$

Заметим, что функция $\Phi(y)$ логарифмически вогнута в силу, например, логарифмической вогнутости меры $\gamma_1$. Следовательно,

$$(\log\Phi(y))' = \frac{\varphi(y)}{\Phi(y)}$$

является невозрастающей функцией и достигает свой минимум в интервале $y \leqslant y_0 = \Phi^{-1}(t)$ в концевой точке $y_0$. Таким образом,

$$t\,\frac{\varphi(y)}{\Phi(y)} \geqslant t\,\frac{\varphi(y_0)}{\Phi(y_0)} = I(t), \quad y \leqslant y_0.$$

В результате получаем (3.6) для всех $y \leqslant y_0$. Так как функция $1-\Phi(y)$ логарифмически вогнута, аналогичные рассуждения применимы к интервалу $y \geqslant y_0$. Лемма 3.1 доказана. $\square$

## 4. Локализация. Доказательство теоремы 2.2

При сведении теоремы 2.2 к одномерному случаю используется лемма о локализации [**16**] (см. также дальнейшее развитие этого метода [**17, 18**]). Более точно, нам потребуется слегка модифицированная версия леммы о локазализации из [**19**, Следствие 2.4].

**Лемма 4.1.** *Пусть $R$ и $S$ — непрерывные функции на ограниченном открытом выпуклом множестве $\Omega$ в $\mathbf{R}^n$, интегрируемые относительно меры Лебега и такие, что*

$$\int R(x)\,dx = 0, \qquad \int S(x)\,dx > 0. \tag{4.1}$$

*Тогда можно найти векторы $a, b \in \Omega$ и логарифмически вогнутую функцию $\psi$ на $[0,1]$ такие, что*

$$\int\limits_0^1 R(ta+(1-t)b)\,\psi(t)\,dt = 0, \qquad \int\limits_0^1 S(ta+(1-t)b)\,\psi(t)\,dt > 0. \tag{4.2}$$

*Кроме того, $\psi$ можно выбрать в виде*

$$\psi(t) = \ell(t)^{n-1},$$

*где $\ell$ — аффинная функция на* $[0,1]$.

Это утверждение формулируется в [**19**] при условии полунепрерывности снизу и ограниченности $S$. Однако, из доказательство видно, что можно отказаться от условия ограниченности $S$ за счет непрерывности (поскольку неравенства (2.2) в [**19**, p. 546] остаются верными и для меньшего открытого выпуклого подмножества $\Omega'$ множества $\Omega$ с замыканием в $\Omega$, и тогда $S$ будет ограниченной в $\Omega'$).

Теперь пусть $\mu$ — абсолютно непрерывная вероятностная мера на открытом выпуклом множестве $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ с плотностью

$$p = e^{-|x|^2/2 - v(x)}, \quad x \in \Omega.$$

Предположим, что $v$ непрерывна на $\Omega$. Для заданных векторов $w, \theta \in \mathbf{R}^n$, $|\theta| = 1$, и логарифмически выпуклой функции $\psi$ с компактным носителем в $\mathbf{R}$ будем называть одномерную плотность

$$q(s) = \frac{1}{Z}\, p(w + s\theta)\, \psi(s), \quad s \in \mathbf{R}, \tag{4.3}$$

*обобщенным условным распределением* $\mu$, где $Z$ — нормирующий множитель такой, что

$$\int q(s)\, ds = 1$$

(здесь мы всегда можем считать, что $w + s\theta \in \Omega$ для всех $s$ из компактного носителя $\psi$).

**Лемма 4.2.** *Предположим, что каждое обобщенное условное распределение $\mu$ является сжатием гауссовой меры на вещественной прямой с нулевым средним и отклонением $\sigma^2$. Тогда для любой локально липшицевой функции $f$ на $\mathbf{R}^n$ со значениями в* $[0,1]$

$$I(\mathbf{E}f) \leqslant \mathbf{E}\sqrt{I(f)^2 + \sigma^2\, |\nabla f|^2}. \tag{4.4}$$

Ожидания понимаются относительно меры $\mu$.

**Доказательство.** Сначала заметим, что $\Omega$ можно считать ограниченной. В противном случае применим неравенство (4.4) к нормированным сужениям $\mu_n$ меры $\mu$ на $\Omega_n = \Omega \cap B(0,n)$ и положим $n \to \infty$. Тогда если (4.4) выполнено для $\mu_n$, в пределе это же верно для $\mu$. Здесь мы воспользовались тем, что обобщенное условное распределение $\mu_n$ представляет обобщенное условное распределение $\mu$.

Итак, допустим, что $\Omega$ ограничена. Достаточно получить (4.4) для класса непрерывно дифференцируемых функций $f : \mathbf{R}^n \to [0,1]$ с ограниченными частными производными. Сформулируем (4.4) в ином виде. Для любых $\alpha \in (0,1)$ и $f$

$$\text{если} \;\; \mathbf{E}f = \alpha, \;\text{то}\;\; I(\alpha) \leqslant \mathbf{E}\sqrt{I(f)^2 + \sigma^2\, |\nabla f|^2}.$$

Зафиксируем число $\alpha \in (0,1)$ и (с целью придти к противоречию) предположим, что приведенная выше импликация неверна, т.е.

$$\mathbf{E}f = \alpha, \quad I(\alpha) > \mathbf{E}\sqrt{I(f)^2 + \sigma^2\, |\nabla f|^2}.$$

Эквивалентно,

$$\mathbf{E}\,(f - \alpha) = 0, \quad \mathbf{E}\left[I(\alpha) - \sqrt{I(f)^2 + \sigma^2\, |\nabla f|^2}\,\right] > 0,$$

откуда следует, что (4.1) выполняется для

$$R(x) = (f(x) - \alpha)\, p(x),$$

$$S(x) = \left[I(\alpha) - \sqrt{I(f(x))^2 + \sigma^2\, |\nabla f(x)|^2}\,\right] p(x).$$

Обе функции непрерывны на $\Omega$. Следовательно, в силу леммы 4.1 неравенство (4.2) выполнено для некоторых векторов $a, b \in \Omega$ и логарифмически вогнутой функции $\psi$ на $[0,1]$.

Случай $a = b$ в (4.2) не может иметь места, так как тогда мы получили бы $R(a) = 0$, $S(a) > 0$, т.е.

$$f(a) - \alpha = 0, \quad I(\alpha) - \sqrt{I(f(a))^2 + \sigma^2\,|\nabla f(a)|^2} > 0,$$

что то же самое, что

$$\sqrt{I(\alpha)^2 + \sigma^2\,|\nabla f(a)|^2} < I(\alpha).$$

Таким образом, необходимо выполняется $a \neq b$. Положим

$$\theta = \frac{a-b}{|a-b|}, \quad w = b$$

и, сделав замену переменной $s = |a-b|t$, перепишем (4.2) в виде

$$\begin{gathered}\int_0^{|a-b|} R(w + s\theta)\,\widetilde{\psi}(s)\,ds = 0,\\ \int_0^{|a-b|} S(w + s\theta)\,\widetilde{\psi}(s)\,ds > 0,\end{gathered} \tag{4.5}$$

где

$$\widetilde{\psi}(s) = \psi(\frac{s}{|a-b|}).$$

Заметим, что эта функция логарифмически вогнута и имеет носитель на интервале $\Delta = (0, |a-b|)$. Кроме того, в терминах вероятностной меры $\nu$ на $\Delta$ с плотностью $q(s)$, определенной в (4.3), для функции $\widetilde{\psi}$ соотношения (4.5) принимают вид

$$\int (f(w + s\theta) - \alpha)\,d\nu(s) = 0, \tag{4.6}$$

$$\int \left[I(\alpha) - \sqrt{I(f(w+s\theta))^2 + \sigma^2\,|\nabla f(w+s\theta)|^2}\right] d\nu(s) > 0. \tag{4.7}$$

Функция $g(s) = f(w + s\theta)$ дифференцируема на вещественной прямой и имеет производную

$$g'(s) = \langle \nabla f(w + s\theta), \theta \rangle\,,$$

откуда

$$|g'(s)| \leqslant |\nabla f(w + s\theta)|.$$

Следовательно, из (4.6) и (4.7) получаем

$$\int (g - \alpha)\,d\nu = 0, \quad \int \left[I(\alpha) - \sqrt{I(g)^2 + \sigma^2\,|g'|^2}\right] d\nu > 0,$$

и, собирая формулы вместе,

$$I\biggl(\int g\,d\nu\biggr) > \int \sqrt{I(g)^2 + \sigma^2\,|g'|^2}\,d\nu. \tag{4.8}$$

Однако это противоречит предположению о том, что $\nu$ представляет сжатие гауссовой меры на вещественной прямой с нулевым средним и отклонением $\sigma^2 = e^{2c}$. Действительно, ввиду леммы 3.1 для таких мер выполняется неравенство (3.3), т.е. (4.8) с противоположным знаком. Лемма 4.2 доказана.

**Доказательство теоремы 2.2.** Пусть $p(x) = e^{-|x|^2/2 - v(x)}$, $x \in \Omega$, — плотность $\mu$. Любое обобщенное условие распределение $\mu$ имеет плотность вида

$$q(s) = \frac{1}{Z}\,p(w + s\theta)\,\psi(s) = \frac{1}{Z}\,\exp\left\{-\frac{s^2}{2} - \langle w, \theta\rangle\,s - \frac{|w|^2}{2} - v(w + s\theta) - V(s)\right\}, \quad s \in \mathbf{R},$$

где $\psi(s) = e^{-V(s)}$ и $V : \mathbf{R} \to (-\infty, +\infty]$ выпукла. Можно сузить эту плотность на открытый интервал $\Delta$ вещественной оси, где $V$ конечна и $w + s\theta \in \Omega$. Следовательно,

$$q(s) = e^{-\frac{1}{2}s^2 - \overline{v}(s)}, \quad \text{где} \quad \overline{v}(s) = v(w + s\theta) + \overline{V}(s), \tag{4.9}$$

где $\overline{V}$ — (конечная) выпуклая функция на $\Delta$.

Однако ввиду основного условия (2.1) для всех $s \in \Delta$ имеем

$$v^*(w+s\theta) + \overline{V}(s) \ \leqslant\ v(w+s\theta) + \overline{V}(s) \ \leqslant\ v^*(w+s\theta) + \overline{V}(s) + c.$$

Это означает, что условие (3.1) леммы 3.1 выполняется для функции $\overline{v}$. Следовательно, в силу леммы 3.1 мера с плотностью $q$ представляет сжатие гауссовой меры на вещественной прямой с нулевым средним и отклонением $e^{2c}$.

Остается применить лемму 4.2 при $\sigma^2 = e^{2c}$.

## 5. Примеры и замечания

Как видно из приведенного выше доказательства, теорему 2.2 можно доказать при несколько более слабом условии на функцию $v$. Целесообразно использовать следующее определение.

**Определение.** Будем говорить, что функция $v : \mathbf{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ *c-квазивыпукла* $(c \geqslant 0)$, если $\Omega = \{x : v(x) < +\infty\}$ является открытым выпуклым множеством в $\mathbf{R}^n$ и для каждых точки $x_0 \in \Omega$ и прямой $L$, проходящей через точку $x_0$, существует аффинная функция $\ell$ такая, что

(a) $v(x_0) = \ell(x_0)$,

(b) $v(x) \geqslant \ell(x) - c$ для всех $x \in \Omega \cap L$.

Можно также сказать, что $v$ $c$-квазивыпукла на $\Omega$.

При размерности 1 это определение эквивалентно свойству (3.1). Следовательно, $v$ $c$-квазивыпукла на $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ тогда и только тогда, когда для любой прямой $L$ такой, что $\Omega \cap L \neq \varnothing$,

$$(v_L)^* \leqslant v \leqslant (v_L)^* + c \quad \text{на} \ \ \Omega \cap L,$$

где $(v_L)^*$ — выпуклая оболочка на $L$ сужений $v|_L$ на интервал $\Delta = \Omega \cap L$.

В частности, для оптимального значения $c$, при котором $v$ $c$-квазивыпукла, имеет место неравенство

$$c \leqslant \sup_x \, [v(x) - v^*(x)],$$

где $v^*$ — выпуклая оболочка $v$ на $\Omega$. В размерности 1 имеем равенство, однако не очевидно, будет ли это верно при $n \geqslant 2$.

В любом случае, неравенство (2.3) остается верным, если $v$ $c$-квазивыпукла на $\Omega$. Кроме того, теорему 2.2 можно формально обобщить, сравнивая $\mu$ с нестандартными гауссовым мерами, как это сделано в следующей теореме.

**Теорема 5.1.** *Пусть $\mu$ — вероятностная мера на $\mathbf{R}^n$ с плотностью*

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = e^{-|x|^2/2\sigma^2 - v(x)}, \tag{5.1}$$

*где $\sigma > 0$ — параметр и $v$ — $c$-квазивыпуклая функция на $\mathbf{R}^n$ $(c \geqslant 0)$. Тогда для любой локально липшицевой функции $f$ на $\mathbf{R}^n$ со значениями в* $[0,1]$

$$I\bigg(\int f\,d\mu\bigg) \leqslant \int \sqrt{I(f)^2 + C^2|\nabla f|^2}\,d\mu, \quad C = \sigma e^c. \tag{5.2}$$

Укажем несколько примеров, для которых несложно вычислить оптимальное значение $c$ на основе одномерной формулы (3.2).

1. Предположим, что непрерывная функция $v$ выпукла на полуоси $(-\infty, x_1]$ и выпукла на полуоси $[x_2, +\infty)$ для некоторого $x_1 < x_2$. Пусть $\ell$ — аффинная функция, график которой проходит через точки $(x_1, v(x_1))$ и $(x_2, v(x_2))$. Предположим, что график $v$ лежит выше графика $\ell$ на интервале $[x_1, x_2]$. Тогда $v$ $c$-квазивыпукла, где

$$c = \max_{x_1 \leqslant x \leqslant x_2} [v(x) - \ell(x)].$$

2. Если дополнительно функция $v$ вещественна на вещественной прямой и вогнута на интервале $[-x_2, x_2]$, то $c = v(0) - v(x_2)$.

3. Например, для полинома

$$v(x) = Ax^4 + Bx^2,$$

где $A > 0$, имеем $c = 0$, если $B \geqslant 0$. В другом случае

$$v''(x) = 12Ax^2 + 2B = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{-B}{6A}},$$

откуда $c = \dfrac{5B^2}{36A}$.

4. Более общо, рассмотрим произвольный полином четвертой степени

$$v(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E, \quad A > 0.$$

Аффинная часть $Dx + E$ не влияет на $c$. Чтобы свести вычисления к предыдущему примеру, заметим, что после сдвига

$$v\left(x - \frac{B}{4A}\right) = Ax^4 + \left(C - \frac{3B^2}{8A}\right) x^2 + \text{ аффинная часть.}$$

Следовательно,

$$c = 0, \quad \text{если } C \geqslant \frac{3B^2}{8A},$$

и в этом случае $v$ выпукла, и

$$c = \frac{5\,(C - \frac{3B^2}{8A})^2}{36A}, \quad \text{если } \ C \leqslant \frac{3B^2}{8A}.$$

5. При заданных параметрах $p > 2$ и $\sigma > 0$ рассмотрим функцию

$$v(x) = \frac{1}{p}\,|x|^p - \frac{1}{2\sigma^2}\,|x|^2.$$

Легко видеть, что в этом случае

$$c \;=\; \frac{p-2}{2p}\,\sigma^{-\frac{2p}{p-2}}. \tag{5.3}$$

Формула (5.3) остается верной для аналогичной функции $v$ на $\mathbf{R}^n$ (в евклидовой норме $|\cdot|$). Этот факт можно использовать для получения неравенства вида

$$I\bigg(\int f\,d\mu_p\bigg) \leqslant \int \sqrt{I(f)^2 + C_p^2\,|\nabla f|^2}\,d\mu_p \tag{5.4}$$

для сферически инвариантной вероятностной меры $\mu_p$ на $\mathbf{R}^n$ с плотностью

$$\frac{d\mu_p(x)}{dx} \;=\; \frac{1}{Z}\,e^{-\frac{1}{p}\,|x|^p}, \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

где $Z$ — нормирующая константа (которая зависит от $p$ и $n$). Положим $\sigma = 1$ и представим плотность меры $\mu_p$ в виде (5.1); в этом случае $c = \dfrac{p-2}{2p}$ согласно (5.3). В силу (5.2) справедливо следующее утверждение.

**Следствие 5.2.** *Для любой локально липшицевой функции* $f : \mathbf{R}^n \to [0,1]$ *справедливо неравенство* (5.4) *для меры* $\mu_p$, $p \geqslant 2$, *с константой* $C_p^2 = \exp\{(p-2)/p\}$.

Заметим, что случай $C_2 = 1$ соответствует гауссовому случаю $\mu_2 = \gamma_n$, и $C_p \leqslant e$ для всех $p \geqslant 2$. Неравенство, аналогичное (5.4), можно также получить, заметив, что $\mu_p$ представляет преобразование $\gamma_n$ при отображении с конечной липшицевой константой. При таком подходе требуются рутинные вычисления и оценивания константы Липшица, тогда как подход на основе возмущений (см. теорему) представляется намного проще.

При $1 \leqslant p < 2$ (этот случай изучался многими авторами) неравенство (5.4) уже больше не имеет места для гауссовой изопериметрической функции $I$ (см., например, **[20, 21, 22, 23]**, где изопериметрическая задача и соответствующие функциональные неравенства рассмотрены для мер $\mu_p$ на вещественной прямой и для их произведений $\mu_p^n$ на $\mathbf{R}^n$).

Заметим также, что в некоторых примерах теорема 5.1 оказывается более предпочтительной, чем теорема 2.2 благодаря гибкому параметру $\sigma > 0$ (который может быть использован для оптимизации константы $C$ в (5.2)).

## Список литературы


1. В. Н. Судаков, Б. С. Цирельсон, "Экстремальные свойства полупространств для сферически инвариантных мер", *Зап. научн. сем. ЛОМИ,* **41**, 14–24 (1974).
2. C. Borell, "The Brunn-Minkowski inequality in Gauss space", *Invent. Math.* **30**, No. 2, 207–216 (1975).
3. A. Ehrhard, "Symétrisation dans l'espace de Gauss", *Math. Scand.* **53**, 281–301 (1983).
4. Yu. A. Davydov, M. A. Lifshits, N. V. Smorodina, *Local Properties of Distributions of Stochastic Functionals*, Am. Math. Soc., Providence, RI (1998).
5. R. Latala, "A note on the Ehrhard inequality", *Studia Math.* **118**, No. 2, 169–174 (1996).
6. C. Borell, "The Ehrhard inequality", *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **337**, No. 10, 663–666 (2003).
7. C. Borell, "Inequalities of the Brunn-Minkowski type for Gaussian measures", *Probab. Theory Related Fields* **140**, No. 1-2, 195–205 (2008).
8. D. Bakry, M. Ledoux, "Lévy-Gromov's isoperimetric inequality for an infinite-dimensional diffusion generator", *Invent. Math.* **123**, No. 2, 259–281 (1996).
9. M. Ledoux, "A short proof of the Gaussian isoperimetric inequality. High dimensional probability" In: Oberwolfach, 1996, pp. 229–232, *Progr. Probab.* **43**, Birkhäuser, Basel (1998).
10. S. G. Bobkov, "An isoperimetric inequality on the discrete cube, and an elementary proof of the isoperimetric inequality in Gauss space", Ann. Probab. 25 (1997), no. 1, 206–214.
11. С. Г. Бобков, "Локализованное доказательство изопериметрического неравенства Бэкри — Леду и некоторые приложения", *Теор. вероятн. примен.* **47**, No. 2, 340–346 (2002).
12. L. A. Caffarelli, "Monotonicity properties of optimal transportation and the FKG and related inequalities", *Comm. Math. Phys.* **214**, 547–563 (2000).
13. S. G. Bobkov, "A functional form of the isoperimetric inequality for the Gaussian measure", *J. Funct. Anal.* **135**, No. 1, 39–49 (1996).
14. M. Ledoux, "Concentration of measure and logarithmic Sobolev inequalities", In: *Séminaire de Probabilités. Lect. Notes Math.* **1709** 120–216 (1999).
15. L. Gross, "Logarithmic Sobolev inequalities." *Am. J. Math.* **97**, 1061–1083 (1975).
16. L. Lovász, M. Simonovits, "Random walks in a convex body and an improved volume algorithm", *Random Struct. Algorithms* **4**, No. 3, 359–412 (1993).
17. M. Fradelizi, O. Guédon, "The extreme points of subsets of $s$-concave probabilities and a geometric localization theorem", *Discrete Comput. Geom.* **31**, No. 2, 327–335 (2004).
18. M. Fradelizi, O. Guédon, "A generalized localization theorem and geometric inequalities for convex bodies", *Adv. Math.* **204**, No. 2, 509–529 (2006),
19. R. Kannan, L. Lovász, M. Simonovits, "Isoperimetric problems for convex bodies and a localization lemma", *Discrete Comput. Geom.* **13**, 541–559 (1995).
20. S. G. Bobkov, C. Houdré, "Isoperimetric constants for product probability measures", *Ann. Probab.* **25**, No. 1, 184–205 (1997).
21. F. Barthe, P. Cattiaux, C. Roberto, "Interpolated inequalities between exponential and Gaussian, Orlicz hypercontractivity and isoperimetry", *Rev. Mat. Iberoam.* **22**, No. 3, 993–1067 (2006).
22. F. Barthe, P. Cattiaux, C. Roberto, "Isoperimetry between exponential and Gaussian", *Electron. J. Probab.* **12**, No. 44, 1212–1237 (2007).
23. С. Г. Бобков, "Об изопериметрических константах для мер произведений", *Пробл. мат. анал.* **40**, 49–56 (2009).


Статья поступила в редакцию 2 февраля 2010 г.