ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Апрель 2010 **Выпуск 46**

Издается с 1966 года

Выпуск 46

Межвузовский международный сборник

Под редакцией проф. *Н. Н. Уральцевой*

Новосибирск
«ТАМАРА РОЖКОВСКАЯ»
2010

Серия основана в 1966 году

УДК 517
ББК 22.1
П762

П762 Проблемы математического анализа. Вып. 46 — Новосибирск: Тамара Рожковская, 2010 — 140 с.

Представлены новые результаты по современным проблемам математического анализа, теории уравнений с частными производными, математической физики. В частности, исследуется коэффициентная обратная задача для гиперболического уравнения и дается аналитическое обоснование адаптивного метода конечных элементов для этой и более общих некорректных задач, для класса многомерных вероятностных распределений, включая сферически инвариантные логарифмически вогнутые меры, выводятся неравенство концентрации и логарифмическое неравенство Соболева, для математической модели динамики атмосферы приводится полное доказательство единственности слабого решения в ограниченной области, предложены новые представления сплайн-вэйвлетных разложений, исследуется зависимость равновесного напряжения от граничного смещения и микронеоднородности в случае двухфазовой упругой среды, исследуется вопрос о спрямляемости веществнных плоских цепей конечной массы в полном сепарабельном метрическом пространстве, с помощью оценки градиента для уравнения Пуассона в пространствах Орлича доказываются некоторые новые варианты неравенства Корна, которые затем используются для доказательства регулярности минимизирующих элементов вариационных интегралов.

Для математиков — специалистов по математическому анализу, дифференциальным уравнениям, математической физике, а также для физиков-теоретиков, механиков.

УДК 517
ББК 22.1

Английский перевод сборника “Проблемы математического анализа”, вып. 46, апрель 2010 опубликован в “Journal of Mathematical Sciences (Springer, New York)”, Vol. 167, no. 3, June 7, 2010.
http://www.springer.com/math/journal/10958

Подписано в печать 28.04.2010. Формат 60x84/8. Усл. печ. л. 16. Тираж 55 экз. Полиграфическая фирма “Риф-Новосибирск”, 630007, г. Новосибирск, Коммунистическая улица, 58

Гражданка РФ Рожковская Тамара Николаевна, а.я. 48, Новосибирск 630090,
тел./факс: (383)3301078, tamara@mathbooks.ru

ISSN 0132–6511

ISSN 0132–6511

ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Апрель 2010 **Выпуск 46**

Содержание

Английский перевод сборника “Проблемы математического анализа”, вып. 46, апрель 2010, опубликован в “Journal of Mathematical Sciences (Springer, New York)”, Vol. 167, No. 3, June 7, 2010.
http://www.springer.com/math/journal/10958

Издательство
«ТАМАРА РОЖКОВСКАЯ»
Новосибирск, Россия

ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Апрель 2010 **Выпуск 46. С. 45-56**

С. Г. Бобков

Университет Миннесоты
Миннеаполис, США
bobko001@umn.edu

ГАУССОВА КОНЦЕНТРАЦИЯ ДЛЯ КЛАССА СФЕРИЧЕСКИ ИНВАРИАНТНЫХ МЕР

Неравенство концентрации и логарифмические неравенства Соболева выводятся для класса многомерных вероятностных распределений, включая сферически инвариантные логарифмически вогнутые меры. Библиография: 17 назв.

1. Введение

Пусть μ — сферически инвариантная вероятностная мера на евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ ($n \geqslant 2$) с плотностью

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = \rho(|x|), \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

где $\rho = \rho(r)$ — неотрицательная функция на положительной полуоси $r > 0$.

В частности, все линейные функционалы $x \to \langle x, \theta \rangle$ имеют распределения относительно μ которые зависят лишь от евклидовой нормы $|\theta|$. Для нормировки предположим, что

$$\int x_1^2 \, d\mu(x) = 1, \tag{1.1}$$

или в иной записи

$$\int |x|^2 \, d\mu(x) = n.$$

Введем функцию концентрации

$$\alpha_\mu(h) \,=\, \sup \left[1 - \mu(A^h)\right], \quad h > 0,$$

где супремум берется по всем измеримым множествам A в $\mathbf{R}^n$ таким, что $\mu(A) \geqslant 1/2$, и обозначим через $A^h = \{x \in \mathbf{R}^n : \exists\, y \in A,\, |x-y| < h\}$ открытую h-окрестность A относительно евклидова расстояния.

Известно, что если ρ логарифмически вогнута, т.е. для всех $x, y > 0$ и $t \in (0,1)$

$$\rho(tx + (1-t)y) \geqslant \rho(x)^t \rho(y)^{1-t},$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке NSF.

то функция концентрации, соответствующая μ, допускает экспоненциально убывающую оценку

$$\alpha_\mu(h) \leqslant e^{-ch}, \tag{1.2}$$

где $c > 0$ — абсолютная константа. Более того, [**1**], в классе всех гладких функций f на $\mathbf{R}^n$ с нулевым μ-средним справедливо неравенство

$$\lambda_1 \int f^2 \, d\mu \leqslant \int |\nabla f|^2 \, d\mu \tag{1.3}$$

с оптимальной константой (спектральной лакуной) $\lambda_1 = \lambda_1(\mu)$, удовлетворяющей неравенству

$$c \leqslant \lambda_1 \leqslant 1.$$

Тот факт, что функция концентрации от μ имеет в худшем случае экспоненциальное убывание и может быть оценена через λ_1, отметили Громов и Мильман [**2**] и Боровков и Утев [**3**]. Более точно (см. [**4**]), если имеет место неравенство типа Пуанкаре (1.3), то

$$1 - \mu(A^h) \leqslant C\, e^{-2\sqrt{\lambda_1}\, h}, \quad \mu(A) \geqslant 1/2,$$

где C — абсолютная константа (например, $C = 18$). Таким образом, если λ_1 отделена от нуля абсолютной константой, мы получаем неравенство концентрации (1.2) с некоторой абсолютной константой $c > 0$.

В общем случае оценку (1.2) нельзя улучшить, исходя из (1.3). Однако во многих интересных примерах, особенно при большой размерности n α_μ убывает на большом интервале так же, как в гауссовском случае. Цель настоящей статьи — уточнить оценку (1.2).

Теорема 1.1. *Если логарифмически вогнутая функция ρ определяет вероятностную меру μ на $\mathbf{R}^n$, подчиненную условию нормировки* (1.1), *то*

$$\alpha_\mu(h) \leqslant e^{-ch^2}, \quad 0 \leqslant h \leqslant \sqrt{n}, \tag{1.4}$$

где $c > 0$ — абсолютная константа.

На функциональном языке неравенство (1.4) можно выразить следующим образом: для любой липшицевой функции $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ такой, что

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}} \leqslant 1, \quad \int f \, d\mu = 0,$$

имеем

$$\mu\{x \in \mathbf{R}^n : |f(x)| \geqslant h\} \leqslant 2e^{-ch^2}, \quad 0 \leqslant h \leqslant \sqrt{n},$$

с точностью до некоторой абсолютной константы $c > 0$.

Напомним, что мера μ на $\mathbf{R}^n$ называется логарифмически вогнутой, если для всех $t \in (0,1)$ она удовлетворяет неравенству типа Брунна — Минковского

$$\mu(tA + (1-t)B) \geqslant \mu(A)^t \mu(B)^{1-t}$$

в классе всех непустых борелевских множеств A и B в $\mathbf{R}^n$. Если мера μ абсолютно непрерывна, то логарифмическая вогнутость μ эквивалентна логарифмической вогнутости ее плотности (теорема Прекопы, см. [**5, 6**]). С учетом этой характеризации ясно, что сферически инвариантная мера μ на $\mathbf{R}^n$ логарифмически вогнута тогда и только тогда, когда функция ρ логарифмически вогнута и невозрастающая. Таким образом, теорема 1.1 включает класс всех сферически инвариантных логарифмически вогнутых вероятностных мер на $\mathbf{R}^n$, которые абсолютно непрерывны относительно меры Лебега.

С другой стороны, поскольку мы не требуем, чтобы ρ была невозрастающей, неравенство (1.4) может рассматриваться как обобщение свойства концентрации на единичной сфере

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| = 1\}.$$

Действительно, при замене (1.1) условием

$$\int |x|^2 \, d\mu(x) = 1,$$

неравенство (1.4) следует заменить неравенством

$$\alpha_\mu(h) \leqslant e^{-cnh^2}, \quad 0 \leqslant h \leqslant 1.$$

В частности, это можно применить к равномерному распределению $\mu = \sigma_{n-1}$ на S^{n-1} (поскольку эта мера является "предельной точкой" для класса всех абсолютно непрерывных сферически инвариантных вероятностных мер μ с логарифмически вогнутой ρ). Кроме того, в этом случае можно убрать условие $0 \leqslant h \leqslant 1$, заметив, что $\alpha_\mu(h) = 0$ если $h > 1$. Поэтому для любого множества $A \subset S^{n-1}$ такого, что $\sigma_{n-1}(A) \geqslant 1/2$, справедливо неравенство

$$1 - \sigma_{n-1}(A^h) \leqslant e^{-cnh^2}, \quad h \geqslant 0,$$

которое является разновидностью свойства концентрации сферы, обычно получаемое как следствие изопериметрической теоремы Леви (см. [**7, 8**]).

Неравенство концентрации из теоремы 1.1 будет получено здесь с помощью логарифмических неравенств Соболева, которые будут рассматриваться для сужений μ на шар радиуса порядка $\sqrt{n}$ (см. § 4 и 5). Мы рассмотрим свойство концентрации распределения евклидовой нормы для μ отдельно в § 2 и 3.

2. Логарифмически выпуклые меры порядка p

С помощью сферических координат можно представить любую сферически инвариантную вероятностную меру μ на $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ как образ меры произведения $\nu \otimes \sigma_{n-1}$ на $(0, +\infty) \times S^{n-1}$ при отображении $(r, \theta) \to r\theta$. Вероятностная мера ν характеризуется как распределение евклидовой нормы $|X|$, где X — случайный вектор в $\mathbf{R}^n$, распределенный в соответствии с μ. Кроме того, если μ абсолютно непрерывна и имеет плотность

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = \rho(|x|),$$

то мера ν абсолютно непрерывна на $(0, +\infty)$ и имеет плотность

$$\frac{d\nu(r)}{dr} = n\omega_n \, r^{n-1} \rho(r), \quad r > 0,$$

где ω_n обозначает объем единичного шара в $\mathbf{R}^n$. Если функция ρ логарифмически вогнутая, получаем специальный класс одномерных логарифмически вогнутых вероятностных распределений на $(0, +\infty)$ с рядом замечательных свойств.

Определение 2.1. Будем говорить, что случайная величина $\xi > 0$ имеет *логарифмически вогнутое распределение порядка* $p \geqslant 1$, если она имеет плотность вида

$$q(r) = r^{p-1} \rho(r)$$

для некоторой логарифмически вогнутой функции ρ на $(0, +\infty)$.

Например, стандартное Гамма-распределение с p степенями свободы, которое имеет плотность

$$q(r) = \frac{1}{\Gamma(p)} \, r^{p-1} \, e^{-r},$$

является логарифмически вогнутой порядка порядка p, если $p \geqslant 1$.

Во многих соотношениях, связанных с общими логарифмически вогнутыми распределениями порядка p, Гамма-распределение играет экстремальную роль. В частности, справедливо следующее утверждение.

Предложение 2.2. *Если $\xi > 0$ имеет логарифмически вогнутое распределение порядка $p \geqslant 1$, то*

$$\mathrm{Var}\,(\xi) \leqslant \frac{1}{p} \, (\mathbf{E}\xi)^2. \tag{2.1}$$

Здесь $\mathrm{Var}\,(\xi) = \mathbf{E}\xi^2 - (\mathbf{E}\xi)^2$ обозначает дисперсию ξ. Равенство в (2.1) достигается при стандартном Гамма–распределении с p степенями свободы.

Таким образом, значение параметра p состоит в том, что благодаря этому параметру можно контролировать концентрацию распределения величины ξ в окрестности ее среднего.

Если p — целое число, то нетрудно вывести неравенство (2.1) из обратного неравенства Ляпунова (см. [**9**]), а общий случай можно получить из результата [**10**]. Более подробно см. [**1**], где вопрос о концентрации логарифмически вогнутых распределений большого порядка и применялся к исследованию гипотезы Каннана, Ловача и Шимоновича для класса логарифмически вогнутых сферически симметрических мер.

3. Гауссова концентрация в терминах порядка p

Для логарифмически вогнутых распределений на вещественной прямой оценки дисперсии, такие, как (2.1), могут быть автоматически улучшены как экспоненциальные оценки для больших уклонений. В качестве варианта, при условии, что ξ имеет логарифмически вогнутое распределение, из (2.1) получаем, например,

$$\mathbf{P}\{|\xi - \mathbf{E}\xi| \geqslant h\,\mathbf{E}\xi\} \leqslant 3\,e^{-\frac{1}{4}\,h\sqrt{p}}, \quad h > 0. \tag{3.1}$$

Однако благодаря порядку логарифмической вогнутости можно извлечь дополнительную информацию. В частности, на интервале $0 \leqslant h \leqslant 1$ выражение $h\sqrt{p}$ в правой части (3.1) можно заменить на $h^2 p$. Впервые наблюдение такого типа сделал Клартаг [**11**] при установлении центральной предельной теоремы для изотропных выпуклых тел (см. более подробно в замечании 3.4 ниже).

Применяя альтернативный подход, мы поясним, как можно получить гауссовы уклонения величины ξ от ее среднего $\mathbf{E}\xi$ на основе оценки (2.1). Итак, пусть ξ имеет логарифмически вогнутое распределение порядка p с плотностью

$$q(r) = r^{p-1}\rho(r),$$

где $\rho(r)$ — логарифмически вогнутая функция при $r > 0$.

В частности, ρ должна быть интегрируемой по Лебегу. Временно предположим, что

$$\int_0^{+\infty} e^{tr}\rho(r)\,dr < +\infty$$

для всех $t \in \mathbf{R}$, и рассмотрим положительные случайные величины ξ_t с плотностями вида

$$q_t(r) = \frac{r^{p-1}e^{tr}\rho(r)}{\int_0^{+\infty} r^{p-1}e^{tr}\rho(r)\,dr}, \quad r > 0,$$

где $t \in \mathbf{R}$ — параметр. Так как все ξ_t также имеют логарифмически вогнутые распределения порядка p, в силу предложения 2.2

$$\mathrm{Var}\,(\xi_t) \leqslant \frac{1}{p}\,(\mathbf{E}\xi_t)^2$$

или в терминах ξ

$$\mathbf{E}\,\xi^2 e^{t\xi}\,\mathbf{E}\,e^{t\xi} - \big(\mathbf{E}\,\xi e^{t\xi}\big)^2 \leqslant \frac{1}{p}\,(\mathbf{E}\,\xi e^{t\xi})^2. \tag{3.2}$$

Введем выпуклую функцию

$$u(t) = \log \mathbf{E}\,e^{t\xi},$$

и положим

$$v(t) = u'(t) = \frac{\mathbf{E}\,\xi e^{t\xi}}{\mathbf{E}\,e^{t\xi}}.$$

Эта функция строго положительна и возрастающая на всей вещественной оси. Кроме того, (3.2) можно рассматривать как дифференциальное неравенство

$$v'(t) = \frac{\mathbf{E}\,\xi^2 e^{t\xi}\,\mathbf{E}\,e^{t\xi} - \big(\mathbf{E}\,\xi e^{t\xi}\big)^2}{\big(\mathbf{E}\,e^{t\xi}\big)^2} \leqslant \frac{1}{p}\,v(t)^2.$$

Следовательно,

$$0 < \left(-\frac{1}{v(t)}\right)' \leqslant \frac{1}{p}$$

для всех $t \in \mathbf{R}$, откуда

$$\left|\frac{1}{v(t)} - \frac{1}{v(0)}\right| \leqslant \frac{|t|}{p}. \tag{3.3}$$

Теперь для определенности положим $\mathbf{E}\xi = 1$, и тогда $v(0) = 1$. Полагаем

$$u_0(t) = \log \mathbf{E} \exp\{t(\xi - \mathbf{E}\xi)\} = u(t) - t, \quad v_0(t) = u_0'(t) = v(t) - 1.$$

Тогда

$$u_0(t) \geqslant 0, \quad u_0(0) = v_0(0) = 0, \quad v_0(t) > -1$$

для всех $t \in \mathbf{R}$, и из (3.3) получаем

$$\frac{|v_0(t)|}{1 + |v_0(t)|} \leqslant \frac{|v_0(t)|}{1 + v_0(t)} \leqslant \frac{|t|}{p}. \tag{3.4}$$

Пусть $|t| \leqslant p/2$. Тогда необходимо

$$|v_0(t)| \leqslant 1$$

и в силу (3.4)

$$|v_0(t)| \leqslant 2\,\frac{|v_0(t)|}{1 + v_0(t)} \leqslant \frac{2\,|t|}{p}, \quad |t| \leqslant \frac{p}{2}.$$

Интегрируя от 0 до t, находим

$$|u_0(t)| \leqslant \left|\int\limits_0^t |v_0(s)|\,ds\right| \leqslant \frac{t^2}{p}.$$

Таким образом, если $\mathbf{E}\xi = 1$ и $|t| \leqslant p/2$, то

$$\mathbf{E} \exp\{t(\xi - \mathbf{E}\xi)\} \leqslant e^{t^2/p}. \tag{3.5}$$

На этом шаге условие конечности $\mathbf{E}e^{t\xi}$ для всех вещественных t можно ослабить, требуя конечности лишь для $t \leqslant p/2$. Фактически, аналогичные рассуждения показывают, что $\mathbf{E}e^{t\xi}$ конечно, если $t < p$. Чтобы избавиться от условия $\mathbf{E}\xi = 1$, мы применим (3.5) к $\xi/\mathbf{E}\xi$. В результате получим следующее утверждение.

Предложение 3.1. *Если $\xi > 0$ имеет логарифмически вогнутое распределение порядка $p \geqslant 1$, то экспоненциальный момент $\mathbf{E}\,e^{t\xi}$ конечен при условии $t\mathbf{E}\xi < p$. Кроме того, для $|t| \leqslant \dfrac{p}{2\,\mathbf{E}\xi}$*

$$\mathbf{E} \exp\{t(\xi - \mathbf{E}\xi)\} \leqslant \exp\left\{\frac{t^2}{p}\,(\mathbf{E}\xi)^2\right\}. \tag{3.6}$$

Пример Гамма-распределения с p степенями свободы показывает, что область $t\mathbf{E}\xi < p$ не может быть увеличена в терминах $\mathbf{E}\xi$ и p.

Применяя неравенство Чебышева, из (3.6) находим, что для всех $h > 0$ и $0 \leqslant t \leqslant p/2$

$$\mathbf{P}\{\xi - \mathbf{E}\xi \geqslant h\mathbf{E}\xi\} \leqslant \exp\left\{\frac{t^2}{p}\,(\mathbf{E}\xi)^2 - th\mathbf{E}\xi\right\},$$

откуда при $t = ph/(2\mathbf{E}\xi)$ следует

$$\mathbf{P}\{\xi - \mathbf{E}\xi \geqslant h\mathbf{E}\xi\} \leqslant e^{-\frac{ph^2}{4}},$$

если $h \leqslant 1$. Аналогичная оценка справедлива для левых уклонений. Подытожим сказанное.

Следствие 3.2. *Если $\xi > 0$ имеет логарифмически вогнутое распределение порядка $p \geqslant 1$, то для всех $0 \leqslant h \leqslant 1$*

$$\mathbf{P}\{\xi - \mathbf{E}\xi \geqslant h\mathbf{E}\xi\} \leqslant e^{-\frac{ph^2}{4}}, \tag{3.7}$$

$$\mathbf{P}\{|\xi - \mathbf{E}\xi| \geqslant h\,\mathbf{E}\xi\} \leqslant 2\,e^{-\frac{ph^2}{4}}. \tag{3.8}$$

Полагая, например, $h = 1$, получаем в (3.7)

$$\mathbf{P}\{\xi \geqslant 2\,\mathbf{E}\xi\} \leqslant e^{-\frac{1}{4}\,p}.$$

В силу логарифмической вогнутости функции $h \to \mathbf{P}\{\xi \geqslant h\mathbf{E}\xi\}$ из приведенного выше неравенства сразу получаем

$$\mathbf{P}\{\xi \geqslant h\mathbf{E}\xi\} \leqslant e^{-\frac{ph}{8}}, \quad h \geqslant 2. \tag{3.9}$$

Чтобы вовлечь в (3.8) значения $h \geqslant 1$ (а в этом случае оценка при больших h должна быть не гауссовой, а экспоненциальной, как в (3.9)), можно воспользоваться общим неравенством типа растяжения из [**12**] (см. также [**13**])

$$1 - \nu(hB) \leqslant (1 - \nu(B))^{-(h+1)/2}, \quad h \geqslant 1, \tag{3.10}$$

где ν может быть произвольной логарифмически вогнутой мерой на $\mathbf{R}^n$ и B — евклидов шар с центром в начале координат. Для заданного $h > 0$ мы применим (3.10) при размерности 1 к распределению ν случайной величины $\xi - \mathbf{E}\xi$, заменяя параметр h на h/a, где $a = \min(1, h)$. Тогда в силу (3.8) и (3.10)

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{|\xi - \mathbf{E}\xi| \geqslant h\,\mathbf{E}\xi\} = \mathbf{P}\Big\{|\xi - \mathbf{E}\xi| \geqslant \frac{h}{a}\,a\,\mathbf{E}\xi\Big\} &\leqslant \mathbf{P}\{|\xi - \mathbf{E}\xi| \geqslant a\,\mathbf{E}\xi\}^{-\frac{1}{2}\,(\frac{h}{a}+1)} \\ &\leqslant 2\,e^{-\frac{a^2}{8}\,(\frac{h}{a}+1)p} \;\leqslant\; 2\,e^{-\frac{aph}{8}}.\end{aligned}$$

Следовательно, приходим к следующему утверждению.

Следствие 3.3. *Если $\xi > 0$ имеет логарифмически вогнутое распределение порядка $p \geqslant 1$, то для всех $h \geqslant 0$*

$$\mathbf{P}\{|\xi - \mathbf{E}\xi| \geqslant h\,\mathbf{E}\xi\} \leqslant 2\,e^{-\frac{p}{8}\,\min(h,h^2)}.$$

Замечание 3.4. Клартаг рассматривал уклонения ξ от моды $t_p = t_p(\xi)$, т.е. от точки максимума плотности $q(r) = r^{p-1}\rho(r)$ величины ξ. Эта точка определена, если ρ принадлежит классу C^2 на $(0, +\infty)$ и $p > 1$, и удовлетворяет уравнению

$$(\log\rho)'(r) = \frac{\rho'(r)}{\rho(r)} = -\frac{p-1}{r}.$$

Как показано в [**11**, Lemma 4.4], если $p \geqslant 2$ целое, то для $0 \leqslant h \leqslant 1$

$$\mathbf{P}\{|\xi - t_p(\xi)| \geqslant h\,t_p(\xi)\} \leqslant C\,e^{-cph^2} \tag{3.11}$$

где $C > 1$ и $0 < c < 1$ — абсолютные константы.

Из (3.8) и (3.11) непосредственно получаем, что

$$\Big(1 - \frac{c}{\sqrt{p}}\Big)\,\mathbf{E}\,\xi \leqslant t_p(\xi) \leqslant \Big(1 + \frac{c}{\sqrt{p}}\Big)\,\mathbf{E}\,\xi,$$

где $c > 0$ — абсолютная константа. Таким образом, неравенства для уклонений (3.8) и (3.11) по-существу, эквиваленты (и по нашему мнению, можно освободиться от условия того, что p — целое число).

4. Логарифмические неравенства Соболева

Согласно следствию 3.2, если случайная величина ξ имеет логарифмически вогнутое распределение большого порядка p, то ее распределение имеет носитель аппроксимативно в интервале $0 < r < 2\mathbf{E}\xi$ и гауссову степень концентрации в окрестности среднего $\mathbf{E}\xi$. Поэтому не удивительно, что на длинных интервалах такие распределения удовлетворяют таким аналитическим неравенствам, как логарифмические неравенства Соболева.

Введем функционал энтропии

$$\mathrm{Ent}_\mu(g) = \int g\log g\,d\mu - \int g\,d\mu\;\log\int g\,d\mu.$$

Этот функционал корректно определен для любой измеримой функции $g \geqslant 0$ на абстрактном вероятностном пространстве (M, μ) и, в общем случае,

$$0 \leqslant \mathrm{Ent}_\mu(g) \leqslant +\infty.$$

Как и в случае дисперсии, $\mathrm{Ent}_\mu(g) = 0$ тогда и только тогда, когда g постоянна μ-п.в. Ясно также, что $\mathrm{Ent}_\mu(g)$ конечна тогда и только тогда, когда

$$\int g \log(1+g)\, d\mu < +\infty.$$

Хорошо известно [**14**], что логарифмически вогнутая вероятностная мера μ на $\mathbf{R}^n$ удовлетворяет логарифмическому неравенству Соболева

$$\alpha\, \mathrm{Ent}_\mu(f^2) \leqslant 2 \int |\nabla f|^2\, d\mu \tag{4.1}$$

где $\alpha > 0$ — положительная константа и f — произвольная гладкая функция на $\mathbf{R}^n$, тогда и только тогда, когда для некоторого $t > 0$

$$\int e^{t|x|^2}\, d\mu(x) < +\infty.$$

Оптимальное значение $\alpha = \alpha(\mu)$ в (4.1) называется *логарифмической константой Соболева* для μ. Оно может быть связано с нормой Орлича, порожденной функцией Юнга

$$\psi_2(r) = e^{r^2} - 1.$$

В общем случае, для заданной случайной величины η на (M, μ) такой, что $\mathbf{E}\, e^{t\eta^2}$ конечно при некотором $t > 0$, норма $c = \|\eta\|_{\psi_2}$ определяется как минимальное неотрицательное число такое, что

$$\mathbf{E}\, \psi_2(|\eta|/c) \leqslant 1.$$

В качестве основного инструмента мы используем нижнюю оценку логарифмической константы Соболева для одномерных логарифмически вогнутых распределений, полученную в [**14**, предложение 4.4].

Лемма 4.1. *Для заданной случайной величины ξ с логарифмически вогнутым распределением μ*

$$\frac{1}{24\, \|\xi - \mathbf{E}\xi\|_{\psi_2}^2} \leqslant \alpha(\mu) \leqslant \frac{8}{3\, \|\xi - \mathbf{E}\xi\|_{\psi_2}^2}.$$

Неравенство в правой части оптимально и равенство достигается для гауссовых мер, тогда как константа $1/24$ в правой части, по-видимому, сильно отличается от оптимальной.

Следующая наша задача — оценить сверху норму $\|\xi - \mathbf{E}\xi\|_{\psi_2}$ при условии, что $\xi > 0$ имеет логарифмически вогнутое распределение с компактным носителем заданного порядка $p \geqslant 1$. Итак, для данного $r_0 \geqslant 1$ предположим дополнительно, что с вероятностью 1

$$\xi \leqslant (1 + r_0)\, \mathbf{E}\xi. \tag{4.2}$$

Для упрощения формул предположим (без потери общности), что $\mathbf{E}\xi = 1$. В силу предложения 3.1 случайная величина $\eta = \xi - \mathbf{E}\xi$ удовлетворяет

$$\mathbf{E}\, e^{t\eta} \leqslant e^{\frac{1}{p}\, t^2}, \quad |t| \leqslant \frac{p}{2}.$$

В силу (4.2) имеем $|\eta| \leqslant r_0$, откуда

$$\mathbf{E}\, e^{t\eta} \leqslant e^{r_0|t|} \leqslant e^{\frac{2r_0}{p}\, t^2}, \quad |t| \geqslant \frac{p}{2}.$$

Из этих двух оценок получаем

$$\mathbf{E}\, e^{t\eta} \leqslant e^{\frac{2r_0}{p}\, t^2}$$

без каких-либо ограничений на t. Интегрируя это неравенство по t относительно гауссовой меры на $\mathbf{R}$ с нулевым средним и дисперсией

$$\sigma^2 > \frac{p}{4r_0},$$

получаем

$$\mathbf{E}\, e^{\sigma^2\eta^2/2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4r_0}{p}\,\sigma^2}}.$$

Здесь правая часть равна 2 при

$$\sigma^2 = \frac{3}{16}\,\frac{p}{r_0},$$

откуда следует

$$\|\eta\|_{\psi_2}^2 \leqslant \frac{2}{\sigma^2} = \frac{32}{3}\,\frac{r_0}{p}.$$

Кроме того, если откажемся от условия $\mathbf{E}\xi = 1$, то эта оценка должна быть заменена следующей:

$$\|\eta\|_{\psi_2}^2 \leqslant \frac{32}{3}\,\frac{r_0}{p}\,(\mathbf{E}\xi)^2.$$

Следовательно, с учетом леммы 4.1 мы получаем следующее утверждение.

Лемма 4.2. *Если $\xi > 0$ имеет логарифмически вогнутое распределение ν порядка $p \geqslant 1$ и удовлетворяет условию* (4.2), *то*

$$\alpha(\nu) \geqslant \frac{c}{r_0}\,\frac{p}{(\mathbf{E}\xi)^2},$$

где $c > 0$ — абсолютная константа.

Можно положить, например,

$$c = \frac{3}{32}\cdot\frac{1}{24} = \frac{1}{256}.$$

Воспользуемся леммой 4.2, чтобы получить логарифмическое неравенство Соболева для сферически симметрических вероятностных мер μ с компактным носителем в $\mathbf{R}^n$, $n \geqslant 2$, и плотностью

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = \rho(|x|),$$

такой, что $\rho = \rho(r)$ логарифмически вогнута. Это условие считается выполненным в следующем утверждении.

Предложение 4.3. *Пусть X — случайный вектор в $\mathbf{R}^n$ с распределением μ, и пусть $r_0 \geqslant 1$. Если с вероятностью* 1

$$|X| \leqslant (1 + r_0)\,\mathbf{E}\,|X|, \tag{4.3}$$

то

$$\alpha(\mu) \geqslant \frac{c}{r_0^2}\,\frac{n}{(\mathbf{E}\,|X|)^2}, \tag{4.4}$$

где $c > 0$ — абсолютная константа.

Доказательство. Нам потребуется вывести логарифмическое неравенство Соболева (4.1) для меры μ с константой, заданной в правой части (4.4). Итак, пусть f — ограниченная положительная гладкая функция на $\mathbf{R}^n$.

Распределение ν случайной величины $\xi = |X|$ логарифмически вогнуто порядка $p = n$ и в силу условия (4.3) имеет в качестве носителя интервал

$$0 \leqslant r \leqslant (1 + r_0)\,\mathbf{E}\xi. \tag{4.5}$$

Поэтому можно применить лемму 4.2: для любой гладкой функции g на $(0, +\infty)$

$$\mathrm{Ent}_\nu(g^2) \leqslant A \int (g')^2\, d\nu, \quad A = \frac{Cr_0}{n}\,(\mathbf{E}\,|X|)^2,$$

где C — абсолютная константа. В частности, для $g(r) = f(r\theta)$ с фиксированным $\theta \in S^{n-1}$, с учетом неравенства $|g'(r)| \leqslant |\nabla f(r\theta)|$ получаем

$$\int f(r\theta)^2 \log f(r\theta)^2 \, d\nu(r) \leqslant \int f(r\theta)^2 d\nu(r) \, \log \int f(r\theta)^2 \, d\nu(r) + A \int |\nabla f(r\theta)|^2 \, d\nu(r),$$

т.е. в терминах функции на единичной сфере

$$u(\theta) = \left(\int f(r\theta)^2 d\nu(r) \right)^{1/2}$$

имеем

$$\int f(r\theta)^2 \log f(r\theta)^2 \, d\nu(r) \leqslant u(\theta)^2 \log u(\theta)^2 + A \int |\nabla f(r\theta)|^2 \, d\nu(r).$$

Интегрируя это неравенство по σ_{n-1} и вспоминая, что отображение $(r, \theta) \to r\theta$ переводит $\nu \otimes \sigma_{n-1}$ в μ, получаем

$$\int f^2 \log f^2 \, d\mu \leqslant \int u^2 \, \log u^2 \, d\sigma_{n-1} + A \int |\nabla f|^2 \, d\mu. \tag{4.6}$$

Известно, что логарифмическая константа Соболева для равномерной меры на S^{n-1} задается формулой $\alpha(\sigma_{n-1}) = n - 1$ (см. [**15**]), т.е. справедливо логарифмическое неравенство Соболева

$$\int u^2 \, \log u^2 \, d\sigma_{n-1} \leqslant \int u^2 \, d\sigma_{n-1} \, \log \int u^2 \, d\sigma_{n-1} + \frac{2}{n-1} \int |\nabla u|^2 \, d\sigma_{n-1}.$$

Так как

$$\int u^2 \, d\sigma_{n-1} = \int f^2 \, d\mu,$$

отсюда с учетом (4.6) получаем

$$\mathrm{Ent}_\mu(f^2) \leqslant \frac{2}{n-1} \int |\nabla u|^2 \, d\sigma_{n-1} + A \int |\nabla f|^2 \, d\mu. \tag{4.7}$$

Чтобы оценить первый интеграл, заметим, что по определению u для всех $\theta, \widetilde{\theta} \in S^{n-1}$

$$\left\langle \nabla u(\theta), \widetilde{\theta} \right\rangle = \frac{2}{u(\theta)} \int r f(r\theta) \left\langle \nabla f(r\theta), \widetilde{\theta} \right\rangle \, d\nu(r).$$

Применяя неравенство Коши — Буняковского и условие (4.5), получаем

$$\left\langle \nabla u(\theta), \widetilde{\theta} \right\rangle^2 \leqslant \frac{4}{u(\theta)^2} \int r^2 f(r\theta)^2 \, d\nu(r) \int \left\langle \nabla f(r\theta), \widetilde{\theta} \right\rangle^2 \, d\nu(r)$$

$$\leqslant 4 \, (1 + r_0)^2 \, (\mathbf{E} \, |X|)^2 \int |\nabla f(r\theta)|^2 \, d\nu(r).$$

Переходя к супремуму по всем $\widetilde{\theta} \in S^{n-1}$, находим

$$|\nabla u(\theta)|^2 \leqslant 4 \, (1 + r_0)^2 \, (\mathbf{E} \, |X|)^2 \int |\nabla f(r\theta)|^2 \, d\nu(r).$$

Остается проинтегрировать это неравенство по σ_{n-1}, что приведет к неравенству

$$\int |\nabla u|^2 \, d\sigma_{n-1} \leqslant 4 \, (1 + r_0)^2 \, (\mathbf{E} \, |X|)^2 \int |\nabla f|^2 \, d\mu$$

и в силу (4.7) — к неравенству

$$\mathrm{Ent}_\mu(f^2) \leqslant \left[\frac{8}{n-1} \, (1 + r_0)^2 \, (\mathbf{E} \, |X|)^2 + A \right] \int |\nabla f|^2 \, d\mu.$$

Здесь множитель перед интегралом не превышает величины

$$\left[\frac{8}{n-1} \, (1 + r_0)^2 + \frac{C r_0}{n} \right] (\mathbf{E} \, |X|)^2 \leqslant \frac{C' r_0^2}{n} \, (\mathbf{E} \, |X|)^2,$$

где C' — абсолютная константа.

Наконец, нетрудно ослабить условие $f > 0$ в (4.1) как $f \geqslant 0$, и потом убрать ввиду общей оценки $|\nabla |f|\,| \leqslant |\nabla f|$. Предложение 4.3 доказано. □

Замечание 4.4. При размерности $n=1$ предложение 4.3 уже не будет верным, поскольку носитель μ может иметь две (связные) компоненты. Например, равномерное распределение μ на $[-2,-1]\cup[1,2]$ "сферически" симметрично и соответствует логарифмически вогнутой функции

$$\rho(r)=\frac{1}{2}\,1_{[1,2]}(r).$$

Однако в этом случае $\lambda_1(\mu)=\alpha(\mu)=0$.

5. Доказательство теоремы 1.1

Сначала выделим важный частный случай как следствие предложения 4.3.

Как и выше, μ — сферически симметричная вероятностная мера на $\mathbf{R}^n$, $n\geqslant 2$, с плотностью

$$\frac{d\mu(x)}{dx}=\rho(|x|),$$

где ρ — логарифмически выпуклая функция на $(0,+\infty)$. Для нормировки будем предполагать, как и в теореме 1.1, что

$$\int |x|^2\,d\mu(x)=n. \tag{5.1}$$

Мы не будем требовать, чтобы μ имела компактный носитель, а вместо этого условия рассмотрим сужения μ на шары подходящего радиуса.

Предложение 5.1. *При заданном $a\geqslant 2$, нормированное сужение μ_a меры μ на шар $|x|<a\sqrt{n}$ удовлетворяет логарифмическому неравенству Соболева*

$$\mathrm{Ent}_{\mu_a}(f^2)\leqslant Ca^2\int|\nabla f|^2\,d\mu_a \tag{5.2}$$

где C — абсолютная константа.

Как мы знаем из следствия 3.2 (см. (3.9)), мера μ имеет существенный носитель в шарах $B_a=B(0,a\sqrt{n})$ в том смысле, что

$$\mu(B_a)\geqslant 1-e^{-an/8}. \tag{5.3}$$

Доказательство предложения 5.1. Пусть X — случайный вектор в $\mathbf{R}^n$, распределенный согласно μ_a. По построению $|X|\leqslant a\sqrt{n}$. Следовательно, условие (4.3) из предложения 4.3 выполнено, если

$$\mathbf{E}\,|X|\geqslant\frac{a\sqrt{n}}{1+r_0}.$$

Случайная величина $\xi(x)=|x|$ на вероятностном пространстве $(\mathbf{R}^n,\mu)$ имеет логарифмически вогнутое распределение (порядка n) со вторым моментом

$$\mathbf{E}\,\xi^2=n,$$

согласно условию (5.1). Так как

$$\mathbf{E}\,|X|=\frac{1}{\mu(B_a)}\int\limits_{B_a}\xi\,d\mu,$$

достаточно выбрать $r_0\geqslant 1$ таким, что

$$\int\limits_{B_a}\xi\,d\mu\geqslant\frac{a\sqrt{n}}{1+r_0}. \tag{5.4}$$

В силу неравенства Чебышева для дополнения $\widetilde{B}_a=\mathbf{R}^n\setminus B_a$ имеем

$$\mu(\widetilde{B}_a)\leqslant\mu\left\{|x|\geqslant 2\sqrt{n}\,\right\}\leqslant\frac{1}{4n}\,\mathbf{E}\,\xi^2\;=\;\frac{1}{4}.$$

Следовательно, по неравенству Коши — Буняковского

$$\int\limits_{\widetilde{B}_a} \xi\, d\mu \;\leqslant\; \sqrt{\mathbf{E}\,\xi^2}\sqrt{\mathbf{E}\,1_{\widetilde{B}_a}} \;\leqslant\; \frac{1}{2}\,\sqrt{\mathbf{E}\,\xi^2}.$$

Так как ξ положительна и имеет логарифмически вогнутое распределение, справедлива оценка типа Хинчина

$$\mathbf{E}\,\xi^2 \leqslant 2\,(\mathbf{E}\,\xi)^2,$$

которое получено в [**16**]. Следовательно,

$$\int\limits_{\widetilde{B}_a} \xi\, d\mu \;\leqslant\; \frac{1}{2}\,\sqrt{2\,(\mathbf{E}\,\xi)^2} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathbf{E}\,\xi.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{B_a} \xi\, d\mu \;\geqslant\; \Big(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\Big)\,\mathbf{E}\,\xi \;\geqslant\; \Big(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\Big)\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,\sqrt{\mathbf{E}\,\xi^2} \;=\; \frac{\sqrt{2}-1}{2}\,\sqrt{n}.$$

Поэтому (5.4) справедливо, если $r_0 \geqslant 2a\,(1+\sqrt{2}) - 1$. Можно взять, например, $r_0 = 5a$.

Таким образом, предложение 5.1 получается из оценки (4.4) предложения 4.3. □

Теперь обратимся к приложению логарифмического неравенства Соболева (5.2) для мер μ_a к свойству концентрации μ. Известно стандартное рассуждение Хербста, приводящее к гауссовой концентрации, однако мы предпочитаем следовать подходу “инфимум–свертка” из [**17**]. Именно, в этой работе показано (см. теорему 2.1 там), что из (5.2) вытекает неравенство

$$\int e^{Q_t f}\, d\mu_a \int e^{-f}\, d\mu_a \leqslant 1, \tag{5.5}$$

где $t = Ca^2$, f — произвольная ограниченная измеримая функция на $\mathbf{R}^n$ и

$$Q_t f(x) \;=\; \inf\left[\, f(y) + \frac{|x-y|^2}{2t}\,\right], \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

где инфимум берется по всем $y \in \mathbf{R}^n$, является классическим оператором инфимум-свертки. В (5.5) можно также рассматривать неограниченные функции f, возможно, принимающие значения $\pm\infty$.

Для заданного непустого измеримого множества A в $\mathbf{R}^n$ мы применим (5.5) к функции f, равной нулю A и $+\infty$ на $\mathbf{R}^n \setminus A$. Так как для всех $x \in \mathbf{R}^n$

$$Q_t f(x) \;=\; \frac{1}{2t}\, d(A,x)^2 \;=\; \frac{1}{2t}\, \inf_{y\in A}\, |x-y|^2,$$

получаем

$$\int \exp\left\{\frac{1}{2Ca^2}\, d(A,x)^2\right\} d\mu_a(x) \;\leqslant\; \frac{1}{\mu_a(A)}.$$

Следовательно, по неравенству Чебышева для всех $h \geqslant 0$

$$1 - \mu_a(A^h) \leqslant \frac{1}{\mu_a(A)}\, e^{-h^2/(2Ca^2)}$$

или, в терминах μ,

$$\mu(B_a) - \mu(A^h \cap B_a) \;\leqslant\; \frac{\mu(B_a)^2}{\mu(A\cap B_a)}\, e^{-h^2/(2Ca^2)},$$

откуда в силу оценки концентрации (5.3) получаем

$$1 - \mu(A^h) \;\leqslant\; \frac{1}{\mu(A\cap B_a)}\, e^{-h^2/(2Ca^2)} + e^{-an/8}. \tag{5.6}$$

Для дальнейших упрощений возьмем, например, $a = 16$ и предположим, что $\mu(A) \geqslant e^{-n}$. Так как $\mu(B_a) \geqslant 1 - e^{-2n}$, имеем $\mu(A\cap B_a) \geqslant \frac{1}{2}\,\mu(A)$, и из (5.6) следует

$$1 - \mu(A^h) \;\leqslant\; \frac{2}{\mu(A)}\, e^{-ch^2} + e^{-n}, \tag{5.7}$$

где $c > 0$ — абсолютная константа. Выбирая меньшее c (например, заменив на $c/2$), можно заменить множитель 2 на 1. Кроме того (5.7) выполняется автоматически в случае $\mu(A) \leqslant e^{-n}$. Поэтому

$$1 - \mu(A^h) \leqslant \frac{1}{\mu(A)}\, e^{-ch^2} + e^{-n}.$$

В частности, если $h \leqslant \sqrt{n}$, то последний член e^{-n} можно проигнорировать, и мы получаем следующее утверждение.

Предложение 5.2. *При условии нормировки* (5.1) *для любого непустого измеримого множества A в* $\mathbf{R}^n$

$$1 - \mu(A^h) \leqslant \frac{1}{\mu(A)}\, e^{-ch^2}, \quad 0 \leqslant h \leqslant \sqrt{n},$$

где $c > 0$ — абсолютная константа.

Если дополнительно $\mu(A) \geqslant 1/2$, получаем утверждение теоремы 1.1 (за счет выбора меньшего $c > 0$, если потребуется).

Литература

1. S. G. Bobkov, “Spectral gap and concentration for some spherically symmetric probability measures”, *Lect. Notes Math.* **1807** (2003), pp. 37–43.
2. M. Gromov, V. D. Milman, “A topological application of the isoperimetric inequality”, *Am. J. Math.* **105**, 843–854 (1983).
3. А. А. Боровков, С. А. Утев, “Об одном неравенстве и связанной с ним характеризацией нормального распределения”, *Теор. вероятн. примен.* **28**, No. 2, 209–218 (1983).
4. С. Г. Бобков, “Замечания о неравенстве Громова — Мильмана” *Вестн. Сыктывкар. унив. Сер. 1* **3**, 15–22 (1999).
5. A. Prékopa, “Logarithmic concave measures with application to stochastic programming.” *Acta Sci. Math. (Szeged)* **32**, 301–316 (1971).
6. C. Borell, “Convex measures on locally convex spaces”, *Ark. Math.* **12**, 239–252 (1974).
7. V. D. Milman, G. Schechtman, *Asymptotic Theory of Finite-Dimensional Normed Spaces*, Lect. Notes Math. **1200**, Springer, Berlin (1986).
8. M. Ledoux, *The Concentration of Measure Phenomenon*, Am. Math. Soc., Providence, RI (2001).
9. R. E. Barlow, A. W. Marshall, F. Proshan, “Properties of probability distributions with monotone hazard rate”, *Ann. Math. Stat.* **34**, 375–389 (1963).
10. C. Borell, “Complements of Lyapunov’s inequality”, *Math. Ann.* **205**, 323–331 (1973).
11. B. Klartag, “A central limit theorem for convex sets”, *Invent. Math.* **168**, No. 1, 91–131 (2007).
12. L. Lovász, M. Simonovits, “Random walks in a convex body and an improved volume algorithm”, *Random Struct. Algorithms* **4**, No. 3, 359–412 (1993).
13. O. Guédon, “Kahane–Khinchine type inequalities for negative exponent”, *Mathematika*, **46**, No. 1, 165–173 (1999).
14. S. G. Bobkov, “Isoperimetric and analytic inequalities for log-concave probability distributions”, *Ann. Probab.* **27**, No. 4, 1903–1921 (1999).
15. C. E. Mueller, F. B. Weissler, “Hypercontractivity for the heat semigroup for ultraspherical polynomials and on the n-sphere”, *J. Funct. Anal.* **48**, 252–283 (1992).
16. S. Karlin, F. Proshan, R. E. Barlow, “Moment inequalities of Polya frequency functions”, *Pacific J. Math.* **11**, 1023–1033 (1961).
17. S. G. Bobkov, I. Gentil, M. Ledoux, “Hypercontractivity of Hamilton-Jacobi equations”, *J. Math. Pures Appl.* **80**, No. 7, 669–696 (2001).

Статья поступила в редакцию 29 марта, 2010 г.