ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2015, том 462, № 3, с. 261–263

МАТЕМАТИКА

УДК 519.21

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ МЕР

© 2015 г. С. Г. Бобков, Дж. Мельбурн (J. Melbourne)

Представлено академиком РАН И.А. Ибрагимовым 10.10.2014 г.

Поступило 20.11.2014 г.

DOI: 10.7868/S0869565215150037

Следуя К. Бореллю [1], вероятностная радоновская мера μ на локально выпуклом пространстве E называется α-вогнутой ($-\infty \le \alpha \le 1$), если она подчиняется неравенству типа Брунна–Минковского

$$\mu((1-t)A + tB) \ge [(1-t)\mu(A)^{\alpha} + t\mu(B)^{\alpha}]^{1/\alpha} \qquad (1)$$

с произвольными непустыми компактными множествами A, $B \subset E$ и для всех $0 < t < 1$. Здесь мы используем стандартное обозначение для взвешенного усреднения множеств по Минковскому, т.е. $(1-t)A + tB = \{(1-t)a + tb\colon a \in A, b \in B\}$. Такое же определение применяется и для необязательно вероятностных (положительных) мер.

Несмотря на длинную историю исследований, в настоящее время α-вогнутые меры весьма популярны в теории вероятностей и выпуклой геометрии. Уже в случае $\alpha = 0$, когда неравенство (1) принимает вид

$$\mu((1-t)A + tB) \ge \mu(A)^{1-t}\mu(B)^{t},$$

мы приходим к важному классу логарифмически вогнутых мер, включающему, в частности, все гауссовские меры. На евклидовом пространстве $E = \mathbb{R}^n$ класс логарифмически вогнутых мер впервые рассмотрел А. Прекопа [2] и ранее другие авторы в одномерном случае [3, 4].

Неравенство (1) становится менее ограничительным с уменьшением параметра α, и в предельном случае $\alpha = -\infty$ мы приходим к самому широкому из этих классов, описываемому неравенством

$$\mu((1-t)A + tB) \ge \min\{\mu(A), \mu(B)\}.$$

Такие меры называются выпуклыми (по терминологии К. Борелля) или гиперболическими (как позднее было предложено В.Д. Мильманом).

School of Mathematics, University of Minnesota, Minneapolis, USA
E-mail: bobkov@math.umn.edu

Часто α-вогнутые вероятностные меры появляются как распределения определенных случайных процессов, так что безразмерный характер неравенства (1) оказывается чрезвычайно полезным при исследовании различных свойств процессов с распределением μ. Причем многие утверждения зависят только от параметра выпуклости α; интересные примеры, связанные с броуновским движением, приведены в [1]. Бореллем были также изучены наиболее общие свойства α-вогнутых мер, такие как закон нуля и единицы и интегрируемость норм.

Более детальный анализ α-вогнутых мер на конечномерных пространствах, в том числе изопериметрические задачи, исследования интегро-дифференциальных неравенств типа Соболева и неравенств типа Хинчина для различных функционалов стал возможным после того, как Л. Ловач и М. Шимоновиц [5] ввели так называемую локализационную лемму.

Теорема 1 [5]. *Если полунепрерывные снизу интегрируемые функции* u, $v\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *удовлетворяют условию*

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x)dx > 0, \qquad \int_{\mathbb{R}^n} v(x)dx > 0,$$

то всегда найдутся точки a, $b \in \mathbb{R}^n$ *и положительная аффинная функция* l *на* $(0, 1)$ *такие, что*

$$\int_0^1 u((1-t)a + tb)l(t)^{n-1}dt > 0,$$

$$\int_0^1 v((1-t)a + tb)l(t)^{n-1}dt > 0.$$

Существуют и другие варианты этой важной теоремы ([6]; см. также [7]). Развивая идеи Л. Пейна и Х. Вайнбергера [8], подход Ловача и Шимоновица основан на понятии “иглы” (needle), появляющейся как результат локализации множеств, на которых интегралы функций u и v остаются положительными (одновременно).

Позднее М. Фраделизи и О. Гюдон предложили альтернативный подход, основанный на описании экстремальных α-вогнутых мер с компактным носителем и последующем применении известной теоремы Крейна–Мильмана (см. [9]).

Отметим, что локализационная лемма формулируется по отношению к мере Лебега на $\mathbb{R}^n$ (в виде гипотезы) и меры с весом l^{n-1} на сегменте $[a, b]$ (в виде заключения). В обоих случаях мы имеем дело с α-вогнутыми мерами при $\alpha = \frac{1}{n}$. Оказывается, можно дополнить и распространить теорему 1, фиксируя значение α, причем на произвольных, в том числе бесконечномерных пространствах.

Т е о р е м а 2. *Пусть* (E, μ) *– полное локально выпуклое пространство с конечной* α*-вогнутой мерой. Если полунепрерывные снизу* μ*-интегрируемые функции* u, v *на* E *удовлетворяют условию*

$$\int_E u d\mu > 0, \quad \int_E v d\mu > 0,$$

то найдутся точки a, $b \in E$ *и конечная* α*-вогнутая мера* ν, *сосредоточенная на сегменте* $\Delta = [a, b]$, *такие, что*

$$\int_\Delta u d\nu > 0, \quad \int_\Delta v d\nu > 0.$$

Теорема 1 часто применяется для того, чтобы свести различные интегральные соотношения в $\mathbb{R}^n$ к аналогичным неравенствам на прямой, хотя и с дополнительным весом под знаком интеграла. В силу теоремы 2, если такое соотношение должно охватывать класс всех α-вогнутых мер на E, то задача сводится к установлению требуемого результата для α-вогнутых мер, сосредоточенных на прямых в пространстве E.

Как один из примеров, приведем несколько неравенств для мер множеств, появляющихся как результат операции типа сжатия:

$$A_\delta = \{x \in A: \forall \Delta \subset F(x \in \Delta \Rightarrow m_\Delta(A) \geq 1 - \delta)\},$$

$$\delta \in [0, 1].$$

Здесь A – измеримое по Борелю подмножество замкнутого выпуклого множества $F \subset E$, Δ – произвольный сегмент внутри F, и m_Δ – нормализованная мера Лебега на Δ (равномерное распределение).

Например, если $F = E$ и A – дополнение к центрально-симметричному открытому выпуклому множеству $B \subset E$, то $A_\delta = E \backslash \left(\frac{2}{\delta} - 1\right) B$.

Т е о р е м а 3. *Пусть* (E, μ) *– полное локально выпуклое пространство с* α*-вогнутой вероятностной мерой, сосредоточенной на замкнутом выпуклом множестве* F. *Для любого измеримого по Борелю множества* $A \subset F$ *и всех* $\delta \in [0, 1]$, *таких что* $\mu^*(A_\delta) > 0$, *имеем*

$$\mu(A) \geq [\delta \mu^*(A_\delta)^\alpha + (1 - \delta)]^{1/\alpha}. \tag{2}$$

Здесь μ^* обозначает внешнюю меру, ассоциированную с μ.

В пространстве $\mathbb{R}^n$ теорема 3 доказана в [10] и [11]. Она обобщает результат Ф. Назарова, М. Содина и А. Вольберга [12] для логарифмически вогнутых мер. В этом случае множества A_δ универсально измеримы и неравенство (2) принимает вид

$$\mu(A) \geq \mu(A_\delta)^\delta.$$

Для приложений теорему 3 полезно сформулировать в терминах распределений функционалов на пространстве E. Для каждой измеримой по Борелю μ-почти везде конечной функции f: $E \to [-\infty, \infty]$ и всех $0 < \varepsilon < 1$ определим так называемый модуль регулярности

$$\delta_f(\varepsilon) =$$

$$= \sup \operatorname{mes}\{t \in (0, 1): |f((1-t)x + ty)| \leq \varepsilon |f(x)|\},$$

где супремум берется по всем точкам x, $y \in E$ таким, что $|f(x)| < \infty$.

С л е д с т в и е 1. *Для любых* $0 < \lambda < \operatorname{ess\,sup}|f|$ *и* $\varepsilon \in (0, 1)$

$$\mu\{|f| > \lambda\varepsilon\} \geq [\delta \mu\{|f| \geq \lambda\}^\alpha + (1 - \delta)]^{1/\alpha}, \tag{3}$$

где $\delta = \delta_f(\varepsilon)$.

Как отмечено в [13], поведение величины $\delta_f(\varepsilon)$ при малых значениях ε отвечает за вероятности как малых, так и больших уклонений f в смысле меры μ (см. также [10]).

Например, если f – измеримая, μ-почти везде конечная норма на E (не равная тождественно нулю), то

$$\delta_f(\varepsilon) = \frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1.$$

В этом случае, полагая

$$B = \{x \in E: f(x) \leq 1\},$$

получаем, что неравенство (3) приобретает вид

$$1 - \mu(B) \geq \left[\frac{2}{r+1}(1 - \mu(rB))^\alpha + \frac{r-1}{r+1}\right]^{1/\alpha}, \tag{4}$$

$$r > 1.$$

Согласно теореме 3, оно справедливо для любого центрально-симметричного, измеримого по Борелю, выпуклого множества B в полном локально выпуклом пространстве E, снабженного α-вогнутой вероятностной мерой μ. В случае $\alpha = 0$ получаем экспоненциальную оценку

$$1 - \mu(rB) \leq (1 - \mu(B))^{(r+1)/2}$$

для класса всех логарифмически вогнутых мер. С использованием локализационной леммы, это неравенство было сначала доказано Ловачем и Шимоновицем для шаров и позднее распространено О. Гюдоном на произвольные симметричные тела пространства $\mathbb{R}^n$ [5, 14].

При $\alpha < 0$ (4) приводит к аналогичным оценкам с полиномиальным убыванием по переменной r.

Легко вывести на основе (4) и оценки для вероятностей малых шаров. Например, при условии $\mu(B) \le \frac{1}{2}$ заключаем, что

$$\mu(\varepsilon B) \le C_\alpha \varepsilon \quad (0 \le \varepsilon \le 1)$$

с постоянной $C_\alpha = \dfrac{2(2^{-\alpha} - 1)}{-\alpha}$ $(\alpha \le 0)$.

Наконец, отметим, что для бесконечномерных α-вогнутых вероятностных мер свойство $\alpha \le 0$ необходимо [15].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Borell C.* // Ark. Math. 1974. V. 12. P. 239–252.
2. *Prékopa A.* // Acta sci. math. (Szeged). 1971. V. 32. P. 301–316.
3. *Ибрагимов И.А.* // Теория вероятностей и ее применения. 1956. Т. 1. С. 283–288.
4. *Давидович Ю.С., Коренблюм Б.И., Хасет Б.И.* // ДАН. 1969. Т. 185. С. 1215–1218.
5. *Lovász L., Simonovits M.* // Random Struct. Algor. 1993. V. 4. № 4. P. 359–412.
6. *Kannan R., Lovász L., Simonovits M.* // Discrete Comput. Geom. 1995. V. 13. № 3/4. P. 541–559.
7. *Gromov M., Milman V.D.* // Compos. Math. 1987. V. 62. P. 263–282.
8. *Payne L.E., Weinberger H.F.* // Arch. Ration. Mech. and Anal. 1960. V. 5. P. 286–292.
9. *Fradelizi M., Guédon O.* // Discrete Comput. Geom. 2004. V. 31. № 2. P. 327–335.
10. *Bobkov S.G., Nazarov F.L.* // Зап. науч. семинаров. ПОМИ. Вероятность и статистика. 2007. Т. 351. С. 54–78.
11. *Fradelizi M.* // Electron. J. Probab. 2009. V. 14. № 71. P. 2068–2090.
12. *Назаров Ф., Содин М., Вольберг А.* // Алгебра и анализ. 2002. Т. 14. № 2. С. 214–234.
13. *Bobkov S.G.* // Large deviations via transference plans // Adv. Math. Res. 2003. V. 2. P. 151–175.
14. *Guédon O.* // Mathematika. 1999. V. 46. № 1. P. 165–173.
15. *Borell C.* // Math. Scand. 1983. V. 53. № 1. P. 125–144.