Записки научных
семинаров ПОМИ
Том ZAI, 2012 г.

С. Г. Бобков*, Г. П. Чистяков†

ОЦЕНКИ ДЛЯ МАКСИМУМА ПЛОТНОСТИ СУММЫ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Если X – случайный вектор в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^d$ с плотностью p, положим

$$M(X) = M(p) = \operatorname{ess\,sup}_x p(x).$$

В остальных случаях, т.е., когда распределение X не абсолютно непрерывно по отношению к мере Лебега на $\mathbf{R}^d$, полагаем $M(X) = \infty$.

Цель настоящей заметки – привлечь внимание читателя к одному весьма общему, но с нашей точки зрения полезному (даже в одномерном случае) свойству функционала M, регулирующему его возможное поведение на суммах независимых величин или векторов.

Теорема 1. *Для любых независимых случайных векторов $X_1, \dots, X_n$ в $\mathbf{R}^d$*

$$M^{-\frac{2}{d}}(X_1 + \dots + X_n) \geq \frac{1}{e} \sum_{k=1}^n M^{-\frac{2}{d}}(X_k). \tag{1}$$

Таким образом, величина $M^{-\frac{2}{d}}$ возрастает для нарастаюших сумм линейно или быстрее по отношению к $M^{-\frac{2}{d}}(X_k)$.

Можно провести очевидную аналогию между (1) и рядом другим известных неравенств для сумм независимых случайных векторов, как правило имеющих вид

$$L(X_1 + \dots + X_n) \geq \sum_{k=1}^n L(X_k). \tag{2}$$

Например, (2) справедливо для

$$L(X) = \exp\left[\frac{2}{d}\, h(X)\right], \tag{3}$$

где $h(X) = -\int p(x) \log p(x)\, dx$ – энтропия Шэннона. В этом случае приходим к так называемому "entropy power inequality" – своего рода информационному варианту неравенства Брунна–Минковского из

Ключевые слова: суммы независимых величин, максимум плотности.
*Работа поддержана грантами NSF и Simons Foundation.
†Работа поддержана SFB-701.

выпуклой геометрии, тоже имеющему похожий вид (см. [1–3]). Как еще один пример, укажем на работу Stam'а [4], получившему неравенство (2) для функционала $L(X) = 1/I(X)$, где $I(X)$ – информационное количество Фишера. В обоих случаях (2) превращается в равенство на гауссовских распределениях с пропорциональными ковариационными матрицами. Что касается функционала $L = 1/M^2$ (при $d = 1$), основным мотивом для его рассмотрения для нас послужили некоторые вопросы относительно поведения плотностей в предельной теореме Эрдеша–Каца для максимума нарастающих сумм независимых случайных величин.

Интересно, что в рассматриваемых неравенствах никакие моментные предположения не нужны.

В качестве непосредственных следствий теоремы 1 приведем два утверждения. Поскольку функционал $M^{-\frac{2}{d}}$ однороден степени 2, то есть,

$$M^{-\frac{2}{d}}(\lambda X) = \lambda^2 M^{-\frac{2}{d}}(X) \qquad (\lambda \in \mathbf{R}),$$

получаем:

Следствие 2. *Если независимые случайные векторы X_k в $\mathbf{R}^d$ удовлетворяют оценке $M(X_k) \leq M$ $(1 \leq k \leq n)$, то для любых $a_k \in \mathbf{R}$, таких что $a_1^2 + \cdots + a_n^2 = 1$, имеем*

$$M(a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n) \leq e^{d/2}\, M. \tag{4}$$

Как показывает пример двух независимых случайных величин X_1 и X_2 с равномерным распределением на интервале $(0,1)$, постоянную $\frac{1}{e}$ в неравенстве (1) и соответственно $e^{d/2}$ в (4) убрать полностью нельзя. Было бы интересно найти наилучшую постоянную в этих неравенствах или описать экстремальные распределения. Как будет видно из дальнейшего, при $n = 2$ наилучшей в (1) является постоянная $\frac{1}{2}$.

Следствие 3. *Если ряд $\sum_n X_n$, составленный из независимых случайных векторов в $\mathbf{R}^d$, сходится по вероятности, то*

$$\sum_n M^{-\frac{2}{d}}(X_n) < \infty.$$

При $d = 1$ получаем необходимое условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M^2(X_n)} < \infty. \tag{5}$$

Конечно, необходимые и достаточные условия сходимости ряда независимых случайных величин хорошо известны (см. напр. [5-6]). Если случайные величины X_n равномерно ограничены ($|X_n| \leq C$ п.н. для всех n с некоторой постоянной C) и имеют нулевое математическое ожидание, то таковым является условие $\sum_n \mathrm{Var}(X_n) < \infty$. В этом случае (5) становится очевидным ввиду известной универсальной нижней оценки

$$M^2(X)\,\mathrm{Var}(X) \geq \frac{1}{12}$$

(где равенство достигается для равномерного распределения на любом конечном интервале; см. напр. [7]). Общий случай, однако, не столь очевиден.

Перейдем теперь к одному варианту теоремы 1 для произвольных (не обязательно ограниченных) плотностей. Поскольку свертка неограниченных плотностей может представлять собой неограниченную функцию, естественным является желание аппроксимировать ее какой-нибудь ограниченной плотностью, измеряя близость, например, в метрике L^1 (то есть, по полной вариации для соответствующих распределений). При этом для оценки максимума аппроксимирующей плотности мы не можем использовать максимумы исходных плотностей. Оказывается, можно использовать другие функционалы, такие как квантили плотности, если плотность рассматривать как случайную величину на пространстве $\mathbf{R}^d$ с мерой, имеющей ту же самую плотность. Приведем одно из утверждений такого рода.

Следствие 4. *Допустим, что независимые случайные векторы X_k в $\mathbf{R}^d$, $k = 1, \dots, n$, имеют плотности p_k, и пусть m_k – медианы случайных величин $p_k(X_k)$. Тогда плотность p суммы $X_1 + \dots + X_n$ можно так аппроксимировать ограниченной плотностью $\tilde{p}$, чтобы*

$$\int_{\mathbf{R}^d} |\tilde{p}(x) - p(x)|\,dx = \frac{1}{2^{n-1}}, \tag{6}$$

и при этом, с некоторой постоянной C_d, зависящей только от d,

$$M(\tilde{p}) \leq \frac{C_d}{n^{\frac{d}{2}+1}} \sum_{k=1}^n m_k.$$

Как эквивалентное утверждение получаем, что плотность p нормализованной суммы $(X_1 + \dots + X_n)/\sqrt{n}$ можно аппроксимировать плотностью $\tilde{p}$, так чтобы выполнялось условие (6), причем,

$$M(\tilde{p}) \leq \frac{C_d}{n} \sum_{k=1}^{n} m_k.$$

В случае одинаково распределенных слагаемых выражение справа равно $C_d\, m$, где m – медиана случайной величины $p_1(X_1)$, и, таким образом, данная оценка для максимума не будет зависеть от n.

В определенном смысле, как будет видно из дальнейшего, плотность $\tilde{p}$ в следствии 4 можно строить канонически. Кроме того, с некоторыми изменениями в формулировках вместо медиан случайных величин $p_k(X_k)$ можно брать их квантили любого заданного порядка.

Приступим теперь к доказательствам. Неравенство (1) можно получить с помощью неравенства Юнга (или Хаусдорфа–Юнга), записанного с точными константами. Такой подход использовался Lieb'ом [8] при выведении (2) для энтропийного функционала (3). Однако, в отличие от (2), вряд ли можно свести неравенство (1) к случаю двух слагаемых, применяя индукцию по n, так как это приведет к быстро убывающим постоянным, зависящим от n. Поэтому, нашей отправной точкой будет служить точное неравенство Юнга не для двух, а большего числа функций.

Обозначим через L^ν пространство всех функций u на $\mathbf{R}^d$ с конечной нормой

$$\|u\|_\nu = \left(\int_{\mathbf{R}^d} |u(x)|^\nu \, dx \right)^{1/\nu}, \qquad 1 \leq \nu \leq \infty.$$

В частности, $\|u\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_x |u(x)|$. Обозначим через $\nu' = \frac{\nu}{\nu-1}$ сопряженную степень, так что $\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu'} = 1$. Следующий важный результат принадлежит Beckner'у [9] и Brascamp'у и Lieb'у [10], см. также [11]. Мы приводим его ниже как лемму, следуя [10], теорема 4. Положим

$$A_\nu = \nu^{1/\nu} (\nu')^{-1/\nu'}, \quad A_1 = A_\infty = 1.$$

Лемма 5. *Пусть даны функции $u_k \in L^{\nu_k}$ $(1 \leq k \leq n)$, причем*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\nu_k'} = \frac{1}{\nu'}, \qquad 1 \leq \nu_k, \nu \leq \infty.$$

Тогда свертка $u = u_1 * \cdots * u_n$ принадлежит L^ν и имеет норму

$$\|u\|_\nu \leq \, A \, \|u_1\|_{\nu_1} \dots \|u_n\|_{\nu_n},$$

где

$$A = (A_{\nu_1} \dots A_{\nu_n} A_{\nu'})^{d/2}.$$

Доказательство теоремы 1. Не умаляя общности, будем предполагать, что все X_k имеют ограниченные плотности p_k. Положим $M_k = M(X_k)$. В силу однородности неравенства (1), можно считать что

$$\sum_{k=1}^{n} M_k^{-\frac{2}{d}} = 1. \tag{7}$$

Пусть $t_k > 0$ – произвольные числа, такие что $t_1 + \dots + t_n = 1$. Применим лемму 5 к функциям $u_k = p_k$, выбирая ν_k так, чтобы

$$\frac{1}{\nu_k'} = t_k \ (1 \le k \le n), \qquad \nu' = 1, \quad \nu = \infty.$$

Все условия леммы 5 выполнены, и для плотности p случайного вектора $S_n = X_1 + \dots + X_n$ мы приходим к неравенству

$$\|p\|_\infty \le A\, \|p_1\|_{\nu_1} \dots \|p_n\|_{\nu_n} \tag{8}$$

с постоянной $A = (A_{\nu_1} \dots A_{\nu_n})^{d/2}$. Чтобы оценить правую часть этого неравенства, сначала заметим, что

$$\begin{aligned} \|p_k\|_{\nu_k} &= \left(\int_{\mathbf{R}^d} p_k(x) \cdot p_k(x)^{\nu_k - 1}\, dx \right)^{1/\nu_k} \\ &\le \left(\int_{\mathbf{R}^d} p_k(x) \cdot M_k^{\nu_k - 1}\, dx \right)^{1/\nu_k} = M_k^{\frac{\nu_k - 1}{\nu_k}} = M_k^{t_k}. \end{aligned}$$

Полагая $s_k = 1 - t_k$, запишем определение констант A_ν при $\nu = \nu_k$ в виде

$$A_{\nu_k} = \frac{(\frac{1}{\nu_k'})^{1/\nu_k'}}{(\frac{1}{\nu_k})^{1/\nu_k}} = \frac{t_k^{t_k}}{s_k^{s_k}}.$$

Таким образом, из (8) получаем

$$M(S_n) \ \le \ \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{t_k^{t_k}}{s_k^{s_k}} \right)^{d/2} M_1^{t_1} \cdots M_n^{t_n}$$

или, что то же самое,

$$\log \left(M(S_n)^{-\frac{2}{d}} \right) \ \ge \ \sum_{k=1}^{n} t_k \log \left(M_k^{-\frac{2}{d}} \right) + \sum_{k=1}^{n} s_k \log s_k - \sum_{k=1}^{n} t_k \log t_k. \tag{9}$$

На следующем шаге следует оптимизировать это неравенство по величинам t_k в пределах симплекса

$$\Delta_n = \{\, t = (t_1, \dots, t_n) : \, t_k \geq 0, \; t_1 + \dots + t_n = 1\}.$$

Не будет, однако, большой потерей, если мы применим (9) с $t_k = M_k^{-\frac{2}{d}}$, что оправдано ввиду предположения (7). В этом случае неравенство (9) существенно упрощается:

$$\log\big(M(S_n)^{-\frac{2}{d}}\big) \; \geq \; \psi_n(t) \; \equiv \; \sum_{k=1}^n s_k \log s_k. \tag{10}$$

Следовательно, достаточно будет оценить снизу правую часть (10) равномерно по всем $t \in \Delta_n$ при $n \geq 2$.

Очевидно, функция ψ_n выпукла и превращается в ψ_{n-1} на границе симплекса. Поэтому, будем рассматривать ψ_n как функцию $(n-1)$-ой переменной $t_1, \dots, t_{n-1}$ в открытой области $t_k > 0$, $t_1 + \dots + t_{n-1} < 1$, полагая $t_n = 1 - (t_1 + \dots + t_{n-1})$. В точке минимума имеем

$$\frac{\partial \psi_n(t)}{\partial t_k} = -\log s_k + \log s_n = 0 \qquad (1 \leq k \leq n-1),$$

что возможно в том и только том случае когда, все t_k совпадают при $k \leq n-1$. Поскольку ψ_n инвариантна при перестановках координат, заключаем, что $t_k = \frac{1}{n}$ в точке минимума, то есть, $s_k = 1 - \frac{1}{n}$. Таким образом, из (10) получаем

$$\log\big(M^{-\frac{2}{d}}(S_n)\big) \; \geq \; \inf_{n \geq 2} \, \inf_{t \in \Delta_n} \, \psi_n(t) \; = \; \inf_{n \geq 2} \, (n-1) \log\big(1 - \frac{1}{n}\big).$$

Остается заметить, что $(1 - \frac{1}{n})^{n-1} > \frac{1}{e}$. Теорема 1 доказана. $\square$

Замечание. При $n = 2$ имеем $\inf_{t \in \Delta_n} \psi_n(t) = \psi_2(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = -\log 2$, и следовательно, теорему 1 можно уточнить в случае двух слагаемых: для любых независимых случайных векторов X и Y в $\mathbf{R}^d$

$$M^{-\frac{2}{d}}(X+Y) \geq \frac{1}{2}\,\big(M^{-\frac{2}{d}}(X) + M^{-\frac{2}{d}}(Y)\big).$$

Написанное неравенство оптимально в том смысле, что равенство достигается – именно, когда X и Y равномерно распределены в кубе $[0,1]^d$. Однако, этот случай тривиален, поскольку имеется более сильная элементарная оценка

$$M^{-\frac{2}{d}}(X+Y) \geq \max\big\{M^{-\frac{2}{d}}(X), M^{-\frac{2}{d}}(Y)\big\}.$$

Доказательство следствия 3. Можно считать, что случайный вектор X_{n_0} имеет ограниченную плотность при некотором n_0; в противном случае $M(X_n) = \infty$ для всех n, и доказывать нечего.

Пусть $S = \sum_{n=1}^{\infty} X_n$, где ряд сходится по вероятности (и, следовательно, с вероятностью единица). Введем частичные суммы $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ и положим $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} X_k$, так что $S = S_n + R_n$. При $n \geq n_0$ случайные векторы S_n и, следовательно, S имеют абсолютно непрерывные распределения. Кроме того, $0 < M(S) \leq M(S_n)$, так как максимум плотности не возрастает при сверточном умножении. Применяя теорему 1, получаем

$$M^{-\frac{2}{d}}(S) \geq M^{-\frac{2}{d}}(S_n) \geq \frac{1}{e} \sum_{k=1}^{n} M^{-\frac{2}{d}}(X_k),$$

и, таким образом, приходим к требуемому заключению. □

Доказательство следствия 4. Квантильное обобщение. Зафиксируем значение $0 < \delta < 1$. Пусть m_k – квантили случайных величин $p_k(X_k)$ порядка δ, т.е., любые числа, удовлетворяющие неравенствам

$$\int_{p_k(x)<m_k} p_k(x)\,dx \leq \delta \leq \int_{p_k(x)\leq m_k} p_k(x)\,dx.$$

Для каждого k разобьем $\mathbf{R}^d$ на две измеримые части $A_k \subset \{x : p_k(x) \leq m_k\}$ и $B_k \subset \{x : p_k(x) \geq m_k\}$, так чтобы

$$\int_{A_k} p_k(x)\,dx = \delta, \qquad \int_{B_k} p_k(x)\,dx = 1 - \delta.$$

Получаем представление

$$p_k(x) = \delta p_{k0}(x) + (1-\delta) p_{k1}(x),$$

где p_{k0} и p_{k1} определяются как нормализованные сужения плотности p_k на множества A_k и B_k, соответственно, причем $M(p_{k0}) \leq m_k$. Отсюда, полагая

$$q_\varepsilon = \left(p_{10}^{\varepsilon_1} * p_{11}^{1-\varepsilon_1}\right) * \cdots * \left(p_{n0}^{\varepsilon_n} * p_{n1}^{1-\varepsilon_n}\right), \qquad \varepsilon_k \in \{0, 1\},$$

получаем также представление для свертки

$$p = p_1 * \cdots * p_n = \sum_{\varepsilon} \delta^{n(\varepsilon)} (1-\delta)^{n-n(\varepsilon)}\, q_\varepsilon, \tag{11}$$

где суммирование производится по всем возможным последовательностям $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ из нулей и единиц, причем используется обозначение

$$n(\varepsilon) = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n$$

для числа единиц в последовательности ε.

Из представления (11) удалим лишь одно слагаемое $(1-\delta)^n\, p_{11} * \dots * p_{n1}$, соответствующее последовательности $\varepsilon = (0, \dots, 0)$. Заметим, что только в этом случае свертка может оказаться неограниченной функцией. Таким образом, в качестве канонической аппроксимации p будет служить плотность

$$\tilde p = \frac{1}{1-(1-\delta)^n} \sum_{n(\varepsilon)\geq 1} q_\varepsilon, \tag{12}$$

где нормализуюшая постоянная подчинена требованию $\int \tilde p(x)\, dx = 1$. По построению

$$\int_{\mathbf{R}^d} |\tilde p(x) - p(x)|\, dx = 2\,(1-\delta)^n,$$

что соответствует условию (6) в случае $\delta = \frac{1}{2}$.

Чтобы оценить максимум плотности $\tilde p$, разобьем сумму в (12) на две части. Сначала отметим, что при отбрасывании в плотности q_ε сверточных сомножителей $p_{k1}^{1-\varepsilon_k}$ максимум плотности может только увеличиться. Более того, применяя теорему 1 к p_{k0}, получаем

$$\begin{aligned} M(q_\varepsilon) \leq M\big(p_{10}^{\varepsilon_1} * \dots * p_{n0}^{\varepsilon_n}\big) \ &\leq \ \Big(\sum_{k=1}^n \varepsilon_k m_k^{-\frac{2}{d}}\Big)^{-\frac{d}{2}} \\ &= \ n(\varepsilon)^{-\frac{d}{2}} \Big(\frac{1}{n(\varepsilon)} \sum_{k=1}^n \varepsilon_k m_k^{-\frac{2}{d}}\Big)^{-\frac{d}{2}}. \end{aligned}$$

В последней сумме – $n(\varepsilon)$ слагаемых. Используя монотонность функций вида $\alpha \to (\mathbf{E}\,\xi^\alpha)^{1/\alpha}$, все выражение справа можно оценить величиной

$$n(\varepsilon)^{-\frac{d}{2}}\, \frac{1}{n(\varepsilon)} \sum_{k=1}^n \varepsilon_k m_k \leq \Big(\frac{2}{\delta n}\Big)^{\frac{d}{2}+1} \sum_{k=1}^n m_k$$

в предположении, что $n(\varepsilon) \geq \frac{\delta n}{2}$. Для значений $1 \leq n(\varepsilon) < \frac{\delta n}{2}$ будем использовать грубую оценку

$$M(q_\varepsilon) \leq \min_{k:\, \varepsilon_k = 1} M(p_{k0}) \leq \min_{k:\, \varepsilon_k=1} m_k \leq \sum_{k=1}^{n} m_k.$$

Комбинируя обе оценки, получаем

$$M(\tilde{p}) \leq \frac{1}{1-(1-\delta)^n} \left(\left(\frac{2}{\delta n}\right)^{\frac{d}{2}+1} + \sum_{1 \leq n(\varepsilon) < \frac{\delta n}{2}} \delta^{n(\varepsilon)} (1-\delta)^{n-n(\varepsilon)} \right) \sum_{k=1}^{n} m_k.$$

Воспользуемся теперь одним известным неравенством для вероятностей уклонений сумм бернуллиевских независимых величин ξ_k, принимающих значения 0 и 1 с вероятностями $\mathbf{P}\{\xi_k = 0\} = \delta$, $\mathbf{P}\{\xi_k = 1\} = 1-\delta$. Именно (см. напр. [12]),

$$\mathbf{P}\left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} (\xi_k - \delta) \leq -r \right\} \leq e^{-2r^2}, \quad r \geq 0.$$

В частности,

$$\sum_{n(\varepsilon) \leq \frac{\delta n}{2}} \delta^{n(\varepsilon)} (1-\delta)^{n-n(\varepsilon)} = \mathbf{P}\left\{ \sum_{k=1}^{n} \xi_k \leq \frac{\delta n}{2} \right\} \leq e^{-n\delta^2/2}.$$

С учетом того, что $1-(1-\delta)^n \geq \delta$, это дает

$$M(\tilde{p}) \leq \frac{1}{\delta} \left(\left(\frac{2}{\delta n}\right)^{\frac{d}{2}+1} + e^{-n\delta^2/2} \right) \sum_{k=1}^{n} m_k.$$

Остается оценить множитель перед $\sum_{k=1}^{n} m_k$. Имеем (делая замену $n = \frac{2x}{\delta^2}$ и считая, что x – произвольное положительное число)

$$\sup_n \left(\frac{\delta n}{2}\right)^{\frac{d}{2}+1} e^{-n\delta^2/2} \leq \delta^{-(\frac{d}{2}+1)} \sup_{x>0} x^{\frac{d}{2}+1} e^{-x} = \left(\frac{d+2}{2e\delta}\right)^{\frac{d}{2}+1}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} M(\tilde{p}) &\leq \frac{1}{\delta} \left(\frac{2}{\delta n}\right)^{\frac{d}{2}+1} \left(1 + \left(\frac{d+2}{2e\delta}\right)^{\frac{d}{2}+1} \right) \\ &\leq \frac{1}{\delta} \left(\frac{1}{\delta^2 n}\right)^{\frac{d}{2}+1} \left(2^{\frac{d}{2}+1} + \left(\frac{d+2}{e}\right)^{\frac{d}{2}+1} \right) < \frac{1}{\delta} \left(\frac{4d}{\delta^2 n}\right)^{\frac{d}{2}+1}, \end{aligned}$$

и мы приходим к обобщенному варианту следствия 4. □

Следствие 6. *Пусть независимые случайные векторы X_k в $\mathbf{R}^d$, $k = 1, \dots, n$, имеют плотности p_k, и m_k – квантили случайных величин $p_k(X_k)$ порядка $0 < \delta < 1$. Тогда плотность p суммы $X_1 + \dots + X_n$ можно аппроксимировать ограниченной плотностью $\tilde{p}$, так чтобы*

$$\int_{\mathbf{R}^d} |\tilde{p}(x) - p(x)|\, dx = 2\,(1-\delta)^n,$$

и при этом,

$$M(\tilde{p}) \ \le\ \frac{C_d(\delta)}{n^{\frac{d}{2}+1}} \sum_{k=1}^n m_k$$

с постоянной $C_d(\delta) = \frac{1}{\delta}\,\big(\frac{4d}{\delta^2}\big)^{\frac{d}{2}+1}$.

В частности, при $\delta \ge \frac{1}{2}$ получаем не зависящую от δ оценку $C_d(\delta) \le 2\,(16\,d)^{\frac{d}{2}+1}$. Случай, когда значение δ достаточно близко к 1, действительно диктуется некоторыми приложениями. Отметим, наконец, что, устремляя $\delta \to 1$, в пределе получаем $\tilde{p} = p$, и следствие 6 возвращает нас к ослабленному варианту теоремы 1.

Замечание. После того как данная заметка была сдана в печать, мы обнаружили работу Б. А. Рогозина [13], в которой доказана следующая весьма деликатная теорема (в продолжение и развитие результатов, полученных в [14]). Если $S_n = X_1 + \dots + X_n$ – сумма независимых случайных величин с конечными фиксированными $M_k = M(X_k)$, то величина $M(S_n)$ максимизируется в том случае, когда каждая X_k равномерно распределена на интервале длины $1/M_k$. Таким образом,

$$M(S_n) \le M(S_n') = M(X_1' + \dots + X_n'),$$

где X_k' независимы и равномерно распределены на $(-\frac{1}{2M_k}, \frac{1}{2M_k})$.

Этот результат может быть использован для уточнения теоремы 1 в размерности $d = 1$, если правильно оценить $M(S_n')$ через дисперсию $\mathrm{Var}(S_n')$. В связи с гипотезой Хенсли и проблемой Буземана–Петти эта задача изучалась Ball'ом в [15]-[16], где было установлено следующее. Если независимые случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n$ равномерно распределены на интервале $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, и $S_n' = a_1\xi_1 + \dots + a_n\xi_n$, причем, $a_1^2 + \dots + a_n^2 = 1$, то

$$1 \le M(S_n') \le \sqrt{2}.$$

Комбинируя правое неравенство с теоремой Рогозина, приходим к оценке

$$\frac{1}{M^2(S_n)} \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{M^2(X_k)},$$

где постоянная $\frac{1}{2}$ уже является наилучшей.

Отметим, что с точностью до абсолютного множителя неравенство (1) в размерности 1 также вытекает из некоторых оценок для функции концентрации, см. [17–18].

Литература

1. A. Dembo, T. M. Cover, J. A. Thomas, *Information-theoretic inequalities.* — IEEE Trans. Inform. Theory **37**, No. 6 (1991), 1501–1518.
2. O. Johnson, *Information theory and the central limit theorem.* — Imperial College Press, London (2004), xiv+209 pp.
3. S. G. Bobkov, M. Madiman, *Reverse Brunn–Minkowski and reverse entropy power inequalities for convex measures.* — J. Funct. Anal. **262**, No. 7 (2012), 3309–3339.
4. A. J. Stam, *Some inequalities satisfied by the quantities of information of Fisher and Shannon.* — Information Control **2** (1959), 101–112.
5. В. В. Петров, *Суммы независимых случайных величин.* Физматлит, М. (1972).
6. А. Н. Ширяев, *Вероятность.* Наука, М. (1980).
7. S. G. Bobkov, G. P. Chistyakov, F. Götze, *Bounds for characteristic functions in terms of quantiles and entropy.* — Electron. Commun. Probab. **17**, No. 21 (2012).
8. E. H. Lieb, *Proof of an entropy conjecture of Wehrl.* — Comm. Math. Phys. **62**, No. 1 (1978), 35–41.
9. W. Beckner, *Inequalities in Fourier analysis.* — Ann. Math. **2**, No. 1 (1975), 159–182.
10. H. J. Brascamp, E. H. Lieb, *Best constants in Young's inequality, its converse, and its generalization to more than three functions.* — Advances Math. **20**, No. 2 (1976), 151–173.
11. F. Barthe, *Optimal Young's inequality and its converse: a simple proof.* — Geom. Funct. Anal. **8**, No. 2 (1998), 234–242.
12. S. G. Bobkov, C. Houdre, P. Tetali, *The subgaussian constant and concentration inequalities.* — Israel J. Math. **156** (2006), 255–283.
13. Б. А. Рогозин, *Оценка максимума свертки ограниченных плотностей.* — Теория вероятн. и ее применен. **32**, No. 1 (1987), 53–61.
14. Ю. В. Прохоров, *Экстремальные задачи в предельных теоремах.* — В кн.: Труды VI Всесоюзного совещания по теории вероятностей и математической статистике. Вильнюс: Гос. изд-во полит. и научн. литер. Лит.ССР, 1962, 77–84.
15. K. Ball, *Cube slicing in R^n.* — Proc. Amer. Math. Soc. **97**, No. 3 (1986), 465–473.
16. K. Ball, *Some remarks on the geometry of convex sets.* — Lecture Notes Math. **1317** (1988), 224–231.

17. Л. П. Постникова, А. А. Юдин, *Усиленная форма для функции концентрации.* — Теория вероятн. и ее применен. **23**, No. 2 (1978), 376–379.
18. А. Л. Мирошников, Б. А. Рогозин, *Неравенства для функции концентрации.* — Теория вероятн. и ее применен. **25**, No. 1 (1980), 178–183.

Bobkov S. G., Chistyakov G. P. Bounds on the maximum of the density for sums of independent random variables.

Sublinear bounds on the maximum of the density for sums of independent random variables are given in terms of the maxima of the densities of the summands.

School of Mathematics University of Minnesota
127 Vincent Hall, 206 Church St. S.E.
Minneapolis, MN 55455 USA
E-mail: bobkov@math.umn.edu

Поступило 15 октября 2012 г.

Fakultät für Mathematik Universität Bielefeld
Postfach 100131 33501 Bielefeld, Deutschland
E-mail: chistyak@math.uni-bielefeld.de