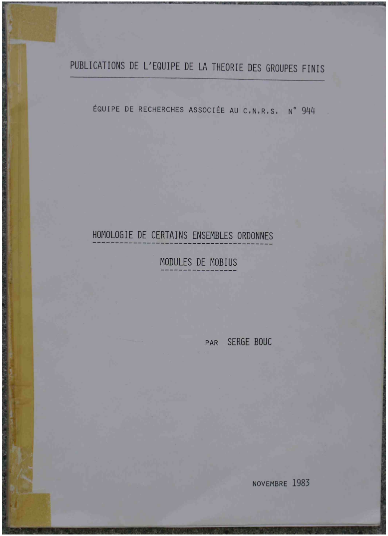
Consequences of the existence of Auslander-Reiten triangles

Peter Webb

University of Minnesota

3 September, 2015

S. Bouc, *Homologie de certains ensembles ordonnés,* C.R. Acad. Sci Paris Sér I **299**, (1984).
S. Bouc, *Modules de Möbius,* ibid.



PREMIERE PARTIE

Homologie de certains enembles ordonnés

I) RAPPELS

La vérité scientifique est liée à l'efficacité. A combien de questions pouvez-vous répondre pour le même prix ? Plus vous avez de bonnes réponses, plus la théorie est bonne.

(Hubert Reeves. CC. Nov. 82)

A) Géneralités

Etant donné un ensemble ordonné X, et un anneau A, on peut associer à X un A-complexe de chaines $(C_n^A(X), d_n)$, noté aussi $C^A(X)$ par économie de frappe, en posant:

$$C_n^A(X) = \bigoplus_{s \in S_n(X)} As \quad \text{pour n entier naturel}$$

$S_n(X)$ désignant l'ensemble des suites totalement ordonnées $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ d'éléments distincts de X, et

$$C_{-1}^A(X) = A$$

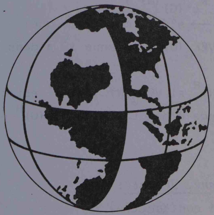
$$C_n^A(X) = 0 \text{ pour n entier plus petit que } -2.$$

La différentielle d_n est donnée par la formule classique:

$$d_n(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i (x_0, x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n)$$

PROPOSITION 4: *Soit X un ensemble ordonné dans lequel toute partie majorée (resp. minorée) admet une borne supérieure (resp. inférieure). Pour x dans X, je pose* $K_X(x)=\{y\in X/\ \{x,y\}$ *n'est ni majorée ni minorée*$\}$

Alors $X-K_X(x)$ *est contractile, pour tout x de X.*



Ce petit objet reflète le mélange subtil d'ordre et de chaos qui constitue notre monde. La plupart du temps, on ne peut pas prédire les conséquences de l'action la plus simple : il y a trop d'effets secondaires. Quelques petites manipulations peuvent avoir des répercussions énormes, tellement imbriquées, qu'il est pratiquement impossible de revenir en arrière. Pas étonnant que certains soient paralysés par la peur, ne veulent plus y toucher du tout, avec l'impression qu'il est très facile, trop facile, de s'y perdre complètement.

Pour la Science. Septembre 1982

Démonstration: Pour plus de commodité, je pose: $x\vee y=\mathrm{Sup}\{x,y\}$ si $\{x,y\}$ est majorée

$= \infty$ sinon

$x\wedge y=\mathrm{Inf}\{x,y\}$ si $\{x,y\}$ est minorée

$=0$ sinon.

Je pars de $A=\{x\}$, qui est contractile.

Alors: $e_X(A)=\{y/\,].,y]\cap\{x\}$ contractile$\}$

$=[x,.[$

et $f_Xe_X(A)=\{y/\,[y,.[\cap[x,.[$ contractile$\}$

$=\{y/\ x\vee y\neq\infty\}$

donc $e_Xf_Xe_X(A)=\{y/\,].,y]\cap\{z/x\vee z\neq\infty\}$contractile$\}$

Alors $f_Xe_X(A)\subset X-K_X(x)$, car $X-K_X(x)$ est clairement égal à $f_Xe_X(A)\cup e_Xf_X(A)$.

De plus, $X-K_X(x)\subset e_Xf_Xe_X(A)$:

en effet, si $y\in X-K_X(x)$, alors

-ou bien $x\vee y\neq\infty$ et alors $y\in f_Xe_X(A)$

-ou bien $x\vee y=\infty$ et alors $x\wedge y\neq 0$ puisque y est dans $X-K_X(x)$.

Soit alors $Z=].,y]\cap\{z/x\vee z\neq\infty\}$

Alors il est clair que $x\wedge y\in Z$. Soit $\varphi:Z\longrightarrow Z$ définie par $\varphi(z)=(x\vee z)\wedge y$ qui est différent de 0 car$\{x\vee z,y\}$ est minorée par z.

PROPOSITION 5: *Soit X un ensemble ordonné. Je pose:*

$$X^* = \{x \in X / \ ]x,.[\text{ n'est pas contractile}\}$$

$$X_* = \{x \in X / \ ].,x[\text{ n'est pas contractile}\}$$

Alors:

1) Si A est une partie de X vérifiant $f_X(A) = X$ (resp. $e_X(A) = X$), alors A contient X^* (resp. A contient X_*)

2) Si X est de hauteur finie, alors $f_X(X^*) = X$ (resp. $e_X(X^*) = X$) et si $X^* \subset B \subset X$ (resp. si $X_* \subset B \subset X$), les inclusions de X^* dans B (resp. de X_* dans B) et de B dans X sont des équivalences d'homotopie.

Une photographie révélatrice

« La photographie vient de jouer un rôle important dans un procès qui n'a pas manqué d'attirer beaucoup les hommes de loi et les hommes de science. Voici l'affaire en quelques mots : le nommé Cilting, de New York, fut accusé d'avoir falsifié certains documents... Aucun témoignage ne parvenait à le faire condamner, mais un de ses employés eut l'idée de faire photographier une feuille de papier que l'on a trouvée sur le pupitre de l'accusé.

Cette feuille était couverte de certains caractères, ou plutôt d'empreintes, comme si l'on avait écrit et chiffré au crayon sur une feuille superposée qui avait été ensuite emportée. La feuille qui restait était tout à fait blanche et ne laissait guère rien de visible à l'œil... Les premiers essais photographiques furent infructueux mais donnaient bien cependant l'espoir de pouvoir beaucoup déchiffrer, si l'on parvenait à rendre les ombres et les lumières plus distinctes. Pour atteindre ce but, on fit reproduire la feuille sur plaque à la gélatine bromurée et au moyen de la lumière électrique. La révélation fut des plus étonnantes. Toutes les idées frauduleuses de l'individu cité se firent jour d'une manière vraiment miraculeuse. On y voyait non seulement les calculs effectués, mais encore les observations écrites à côté des chiffres, ce qui démontrait parfaitement les méfaits de l'accusé qui, à la fin du procès, a été condamné à cinq ans de travaux forcés. »

La Nature, 1882.

Démonstration: Avec dans les rôles

- De l'accusé: X^*
- Du président: le code mathématique
- Du procureur: la loi mathématique
- De l'avocat de la défense: les contre-exemples
- Des jurés: la communauté mathématique
- Des témoins à charge: les chercheurs

E.M. – L'intuition, l'imagination, le rêve ont un rôle énorme. Mais vous savez, c'est un rôle qu'on ne peut pas mettre en formules mathématiques ; on n'en parle pas dans les manuels scientifiques. Dans la biographie de ceux qui ont « trouvé », on voit bien que « l'inspiration » est très variée. Poincaré disait qu'il a trouvé la solution à des problèmes pendant son sommeil. Le rôle du phantasme, de l'imaginaire est absolument incroyable, à condition qu'il soit en dialogue avec le travail logique et cohérent.

(Edgar Morin. CC. Nov. 82)

<u>Corollaire 1: (Quillen) Soit G un groupe fini. L'inclusion $A_p(G) \longrightarrow s_p(G)$ est une équivalence d'homotopie.</u>

<u>Démonstration</u>: En effet, si P est un p-groupe, alors $s°(P)=].,P[_{s_p(G)}$ est contractile si $\Phi(P)\neq(1)$, puisque $K_p(\Phi(P))=\emptyset$. Ceci prouve que $s_p(G)^* \subset A_p(G) \subset s_p(G)$. D'où le résultat.

Remarque: En fait, $s_p(G)^*=A_p(G)$ (cf. plus loin)

<u>Corollaire 2: Soit G un groupe fini et $B_p(G)=\{P\in s_p(G)/O_p(N_G(P))=P\}$ Alors l'injection de $B_p(G)$ dans $s_p(G)$ est une équivalence d'homotopie.</u>

<u>Démonstration</u>: En effet, Quillen démontre que $]P,.[_{s_p(G)}$ est homotope à

duis que $H_k^A(]U,G[^H)=0$ si $k\neq l=|n(U)|-2$, et pour $k=l$, une base de $H_l^A(]U,G[^H)$, même un peu plus. En effet:

<u>OPOSITION 9</u>: *Je note* $\underline{n}$ *la suite* $(UN_i)_{i\in n(U)}$. *Alors si* $s\in Max\ Sd(M^H_{i_0}(U)*\ldots*M^H_{i_{\ell+1}}(U))$, *soit* $s=(W_{i_0},\ldots,W_{i_{\ell+1}})$

<u>pose</u>:

$$e^s_{\underline{n}} = \sum_{\sigma\in Bij\{i_0,\ldots,i_{\ell+1}\}} \varepsilon_\sigma\big(W_{\sigma(i_0)}\cap\ldots\cap W_{\sigma(i_\ell)},\ldots,W_{\sigma(i_0)}\cap W_{\sigma(i_1)},W_{\sigma(i_0)}\big)$$

<u>ors</u>:

<u>Les</u> e^s_n, <u>pour</u> $\underline{n}$ <u>fixée et s variable, forment une base d'un supplémentaire le Im</u> $\overline{d}_{\ell+1}$ <u>dans Ker</u> d_ℓ (<u>où</u> d_ℓ <u>désigne la différentielle du complexe associé</u> $]U,G[^H)$<u>, et J ne dépend pas de la suite</u> $\underline{n}$.

<u>Les modules</u> $H^A_m(]U,G[^H)$ <u>sont nuls pour</u> $m\neq|n(U)|-2\ (=\ell)$

) <u>Le module</u> $H^A_\ell(]U,G[^H)$ <u>est un module libre de dimension</u> $\prod_{i\in n(U)} m^H_i(U)$, <u>où</u> <u>i noté</u> $m^H_i(U)=|M^H_i(U)|$

<u>La caractéristique d'Euler Poincaré de</u> $]U,G[^H$ <u>vaut</u>

$$\chi(]U,G[^H)=(-1)^{|n(U)|}\prod_{i\in n(U)} m^H_i(U)$$

<u>ollaire</u>: <u>Les conditions suivantes sont équivalentes:</u>

<u>L'ensemble</u> $]U,G[^H$ <u>est contractile.</u>

$\underline{\chi(]U,G[^H)=0}$

) <u>Il existe V dans</u> $]U,G[^H$ <u>tel que</u> $K_{]U,G[}(V)^H=\emptyset$

<u>Il existe un sous-groupe normal N de G, stable par H, tel que</u> $U\neq UN\neq G$ <u>et que</u> $K_{]U,G[}(UN)^H=\emptyset$ (<u>autrement dit, si W est stable par H, contient U, et ifie</u> $WN=G$<u>, alors</u> $W\cap N\neq U\cap N$).

<u>onstration</u>: Les éléments $e^s_{\underline{n}}$ sont les images des vecteurs de base des $H_1(].,s[)$ forment donc une base de $\mathrm{Ker}\,\partial_1$ dans $C^A_1(]U,G[^{H*})$ puisque $C_{k+1}(]U,G[^{H*})=0$ le lemme 2. Soit i l'injection de $]U,G[^{H*}$ dans $]U,G[^H$: c'est une équi-ence d'homotopie. Je pose $J=i_1(\mathrm{Ker}\ \partial_1)$ et je sais alors que:

$J+\mathrm{Im}\ d_{l+1}=\mathrm{Ker}\ d_1$ (car $H_1(i)$ est surjective)

que $J\cap\mathrm{Im}\ d_{l+1}=0$ (car $H_1(i)$ est injective)

c J est un supplémentaire de $\mathrm{Im}\ d_{l+1}$ dans $\mathrm{Ker}\ d_1$, qui ne dépend pas de suite $\underline{n}$ (car $\underline{n}$ n'intervient pas dans la définition de J)

Alors pour $\underline{n}$ fixée, les $e^s_{\underline{n}}$, vus cette fois comme des éléments de $C_1(]U,G[^H)$, ment une base de J. D'où l'assertion i).

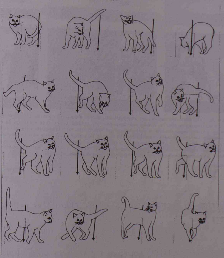
L'assertion 2 est déjà démontrée, et iii) et iv) se déduisent trivialement l'assertion i).

Pour le corollaire, je sais déjà que i)$\Leftrightarrow$ ii) par le lemme 3 et le calcul $\chi(]U,G[^H)$. Je sais aussi que iv)$\Rightarrow$ iii) $\Rightarrow$ i) (proposition 4 cor.1)

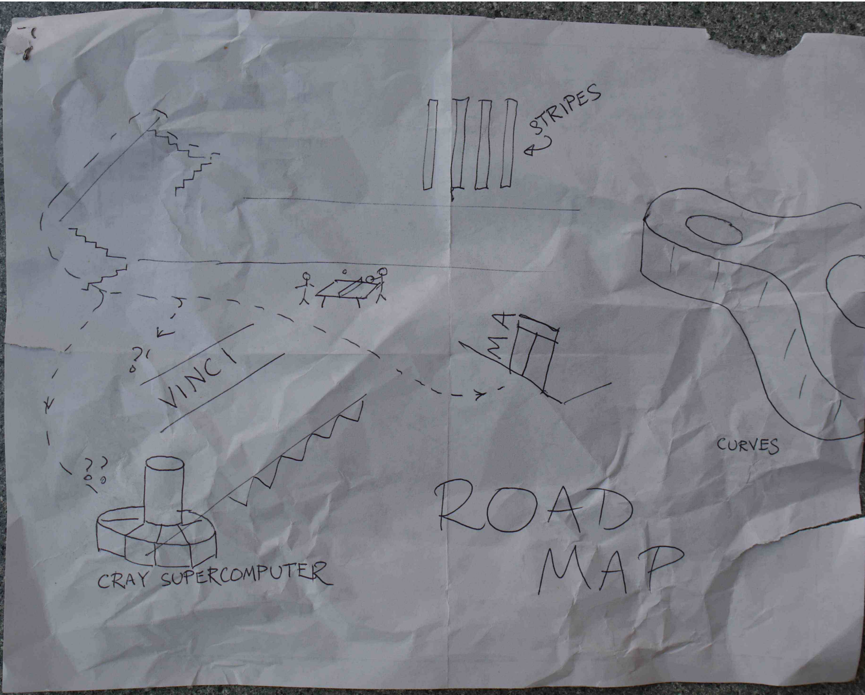
Enfin si $]U,G[^H$ est contractile, soit $i\in n(U)$ tel que $M^H_i(U)=\emptyset$, qui existe par le lemme 3. Je sais que $UN_i\neq G$ (sinon i=Sup n(U) et $M^H_i(U)=\{UN_{i-1}\}\neq\emptyset$), et que $UN_i\neq U$ (sinon $i\notin n(U)$), et si $W\in K_{]U,G[}(UN_i)^H$, j'ai vu que $W.N_{i-1}$ est dans $M^H_i(U)$. Donc $K_{]U,G[}(UN_i)^H=\emptyset$ et i) $\Rightarrow$ iv). cqfd.

Appuyer sur un levier pour obtenir l'ouverture d'une porte est pour le chat un comportement parfaitement arbitraire. Lui faut-il pour l'apprendre une disposition à la superstition?

A



Le cas particulier U=(1) dans la proposition 9 permet d'interpréter les résultats en d'autres termes. Je vois ainsi que $H_l(s^\circ(G)^H)$ est nul sauf si l=k (où k est tel qu'il existe une suite maximale de sous-groupes normaux de G stables par H du type $N_{-1}=(1)\subset N_0\subset\ldots\subset N_k\subset N_{k+1}=G$), et que $H_k(s^\circ(G)^H)$ est libre de dimension $\prod_{0\le i\le k} m^H_i$, où m^H_i désigne le nombre de compléments de N_i/N_{i-1} dans G/N_{i-1} ....qui sont stables par H. Enfin il y a équivalence entre le fait que $s^\circ(G)^H$ est contractile, le fait que $\chi(s^\circ(G)^H)=0$, le fait qu'il existe un sous-groupe propre de G stable par H et qui n'a aucun complément stable par H, et le fait qu'il existe un tel sous-groupe qui soit de plus normal dans G. Autrement dit, $s^\circ(G)^H$ est contractile si et seulement si le "H-module" G n'est pas "semi-simple".


STRIPES
VINCI
MA
CURVES
ROAD
MAP
CRAY SUPERCOMPUTER

Outline:

Happy Birthday Serge!

Auslander-Reiten triangles?

Benson-Parker theory

Shape of the quiver

The graded center and almost vanishing morphisms

Categories of interest

Let $\mathcal{C}$ be a k-linear triangulated category which is Hom-finite and Krull-Schmidt, where k is a field. Most of the time I assume Auslander-Reiten triangles exist. This is equivalent to the existence of a Serre functor.

Main examples:

- the stable module category of a self-injective algebra. The shift $M[1] = \Omega^{-1}M$.
- the homotopy category of perfect complexes of a Gorenstein algebra.
- cluster categories.

Auslander-Reiten triangles

An Auslander-Reiten triangle in $\mathcal{C}$ is a triangle $U \xrightarrow{\alpha} V \xrightarrow{\beta} W \xrightarrow{\gamma} U[1]$ in which

- $\gamma \neq 0$,
- U and W are indecomposable,
- whenever $f : X \to W$ is not split epi there is a factorization $f = \gamma g$ for some $g : X \to V$ (and a dual condition).

Auslander-Reiten triangles were introduced by Happel, who established their first properties. When they exist, the Auslander-Reiten quiver is a translation quiver.

Example

Proposition

Let S be a simple kG-module, projective cover P_S. The Auslander-Reiten quiver of perfect complexes has the following shape close to P_S:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & P_S[-1] & & & P_S & & & & P_S[1] \\
 & & \searrow & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\
\cdots & & & \mathcal{P}_{\Omega^{-1}S}[-1] & & & \mathcal{P}_{\Omega^{-1}S} & & \cdots \\
 & & \nearrow & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\
 & & & & \mathcal{H}_S & & & & \\
 & & & \vdots & & & \vdots & &
\end{array}
$$

Here $\mathcal{P}_{\Omega^{-1}S} = (P_S \to P_S)$ and $\mathcal{H}_S = P_S \to P_S \to P_S$.

Basic lemma

This was observed by Erdmann-Skowroński in the case of stable module categories.

Lemma

Let $X \to Y \to Z \to X[1]$ be an Auslander-Reiten triangle and let W be indecomposable.

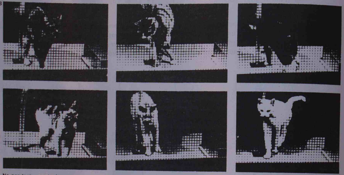
1. *If $W \not\cong Z[r]$ for any r the long exact sequence obtained by applying $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, -)$ to the triangle is a splice of short exact sequences*

   $$0 \to \mathrm{Hom}(W, X[n]) \to \mathrm{Hom}(W, Y[n]) \to \mathrm{Hom}(W, Z[n]) \to 0.$$

2. *When $W \cong Z[n]$ the corresponding connecting homomorphism has rank 1.*

J'indiquerai pour finir cette première partie les formules dites "de changement de base", permettant de changer la suite $\underline{n}$, et enfin je décrirai ce qui se passe quand G est un p-groupe.

B



Ne pas tenir compte des comportements naturels des animaux peut conduire à de graves erreurs d'interprétation. Ainsi des psychologues avaient décrit les comportements du chat (A) comme des comportements «superstitieux». Il se serait agi de comportements stéréotypés, artificiellement liés à la situation expérimentale; le chat les aurait par hasard associés à la reussite de la tâche (déclencher l'ouverture d'une porte de sortie en appuyant sur la barre — celle-ci est représentée par la flèche sur le dessin). Par la suite l'animal aurait répété cette association comme moyen de reussir la tâche, un peu à la manière dont on «touche du bois», pour s'assurer d'un évènement favorable! Mais la réalité est beaucoup plus simple: ces comportements ne sont rien d'autre que les réactions de «salutation» que font tous les chats lorsqu'ils rencontrent quelqu'un de familier. Les photos (B) montrent ces réactions bien connues des amis des chats! (*Science*, 205, 1032, 1979.)

(4) E.R. Guthrie and G.P. Horton, *Cats in a puzzle box*, 1946

LA RECHERCHE N° 107 JANVIER 1980

<u>PROPOSITION 10</u>: *Soit* $s=(V_\ell,V_{\ell-1},\dots,V_0)\in C_\ell(]U,G[^H)$ *et* $\underline{n}=(UN_{i_0},\dots,UN_{i_\ell})$

<u>*Je pose*</u>:

$$\varphi_{\underline{n}}(s)=0 \text{ si } \exists j \text{ tel que } V_j\notin K_{]U,G[}(UN_{i_j})^H$$

$$\varphi_{\underline{n}}(s)=e^t_{\underline{n}} \text{ sinon, où } t \text{ désigne la suite } (V_\ell N_{i_{\ell-1}})$$

<u>*Alors quelles que soient les suites*</u> $\underline{n}$ *et* $\underline{n}'$, <u>*j'ai:*</u>

$$\varphi_{\underline{n}'}\varphi_{\underline{n}}=\varphi_{\underline{n}} \quad \text{et } \operatorname{Im}\varphi_{\underline{n}}=J$$

(<u>*Autrement dit*</u> $\varphi_{\underline{n}}$ <u>*est un projecteur d'image J pout tout*</u> $\underline{n}$)

<u>Démonstration</u>: Il faut d'abord prouver que $\varphi_{\underline{n}}$ est bien définie.

<u>*LEMME 7: Si*</u> $V\in K_{]U,G[}(UN_{i_j})^H$, <u>*alors*</u> $n(V)=\{i_0,\dots,i_j\}$.

<u>Démonstration</u>: En effet, je sais que $V\in K_{]U,G[}(UN_{i_j})^H$ si et seulement si V est un élément de $]U,G[^H$ vérifiant $VN_{i_j}=G$ et $V\cap N_{i_j}=U\cap N_{i_j}$. Alors puisque

j'ai $VN_{i_j}=G$, je sais que $\operatorname{Sup} n(V)\leq i_j$.

Comme de plus V contient U, donc $n(V)\subset n(U)$, donc $n(V)\subset\{i_0,\dots,i_j\}$.

De plus, je peux naturellement supposer ici que $]U,G[^H$ n'est pas contractile (sinon il n'y a pas de base $(e^t_{\underline{n}})\dots$). Alors:

- Si $m\in n(U)$, j'ai $U\cap N_m=U\cap N_{m-1}$

En effet, soit W contenant U tel que $n(W)=\{m\}$. Alors $WN_m=G$ et $W\cap N_m=N_{m-1}$, donc

$$U\cap N_{m-1}=U\cap W\cap N_m=U\cap N_m.$$

- Alors si $m\leq i_j$, j'ai $V\cap UN_m\subset V\cap UN_{i_j}=U$ donc $U(V\cap N_m)=U$ et $V\cap N_m=U\cap N_m$.
- Si donc pour $m\leq j$, j'ai $VN_{i_m}=VN_{i_m-1}$, alors $N_{i_m-1}\subset N_{i_m}\subset VN_{i_m-1}$ et

$$N_{i_m}=N_{i_m-1}(V\cap N_{i_m})=N_{i_m-1}(U\cap N_{i_m})=N_{i_m-1}(U\cap N_{i_m-1})=N_{i_m-1}$$

une contradiction qui prouve que pour $m\leq j$, j'ai $VN_{i_m}\neq VN_{i_m-1}$ et donc que $\{i_0,\dots,i_j\}$ est contenu dans $n(V)$. Le lemme 7 est ainsi démontré. Il permet entre autres des égalités du type $VN_{i_m-1}=VN_{i_{m-1}}\dots$

<u>Démonstration de la proposition 10</u>: Le lemme 7 permet d'établir une bijection entre l'ensemble des suites $(W_{i_0},\dots,W_{i_{l+1}})$ dans $\prod_{i\in n(U)} M^H_i(U)$ et les suites $(V_1,\dots,V_0)$ de $C_1(]U,G[^H)$ telles que pour tout j, le groupe V_j soit dans $K_{]U,G[}(UN_{i_j})^H$: si $(W_{i_0},\dots,W_{i_{l+1}})$ est une suite du premier type,

je pose: $\quad V_j=W_{i_0}\cap W_{i_1}\cap\dots\cap W_{i_j}$ pour $j\neq l+1$ (j'ai $V_{l+1}=U$)

Alors (lemme 5) $n(V_j)=\{i_0,\dots,i_j\}$.

Mais $\quad UN_{i_j}=W_{i_{j+1}}\cap W_{i_{j+2}}\cap\dots\cap W_{i_{l+1}}$ (en effet $UN_{i_j}\subset W_{i_{j+1}}\cap\dots\cap W_{i_{l+1}}$ et $n(UN_{i_j})=\{i_{j+1},\dots,i_{l+1}\}$ par le lemme 1, d'où l'égalité par les lemmes 2 et 5)

Il est donc clair que $V_j\cap UN_{i_j}=U$ (lemme 4). Comme $n(V_jN_{i_j})=\emptyset$, j'ai $V_jN_{i_j}=G$ et la suite (V_j) est du second type.

Inversement, si (V_j) est du second type, je pose $W_{i_j}=V_jN_{i_{j-1}}$ (en faisant de plus $V_{l+1}=U$), et le lemme 7 prouve que la suite obtenue est du premier type. Il est facile de voir que les deux constructions sont inverses l'une de l'autre. Ceci prouve que $\varphi_{\underline{n}}$ est bien définie.

Je démontre alors la proposition 10 en prouvant que $\varphi_{\underline{n}}$ est un projecteur d'image J:

Il est clair que $\varphi^2_{\underline{n}}(s)=0=\varphi_{\underline{n}}(s)$ si $s=(V_1,\dots,V_0)$ et s'il existe j tel que V_j ne soit pas dans $K_{]U,G[}(UN_{i_j})^H$.

Dans le cas contraire, j'ai: $\quad \varphi^2_{\underline{n}}(s)=\varphi_{\underline{n}}(e^t_{\underline{n}})$ où t est la suite $(V_jN_{i_{j-1}})$

Revenant à la définition de $e^t_{\underline{n}}$, je vois que pour calculer $\varphi_{\underline{n}}(e^t_{\underline{n}})$, je dois trouver les permutations σ telles que pour tout j,

$$W_{\sigma(i_0)}\cap W_{\sigma(i_1)}\cap\dots\cap W_{\sigma(i_j)}\in K_{]U,G[}(UN_{i_j})^H \quad \text{où } W_{i_m}=V_mN_{i_{m-1}}$$

Benson-Parker theory

Define $A(\mathcal{C}) := K_0(\mathcal{C}, \oplus)$, the Grothendieck group with respect to $\oplus$.

Bilinear form:

$$\langle\ ,\ \rangle : A(\mathcal{C}) \times A(\mathcal{C}) \to \mathbb{Z}$$

by $\langle [C], [D] \rangle := \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D)$.
Dual elements: if $X \to Y \to Z \to X[1]$ is an Auslander-Reiten triangle in $\mathcal{C}$ we put $\hat{Z} := [Z] + [X] - [Y]$ in $A(\mathcal{C})$.

Non-degeneracy of the dim hom form

Proposition

Let $X \to Y \to Z \to X[1]$ *be an Auslander-Reiten triangle in* $\mathcal{C}$ *and let* W *be an indecomposable object. If* $Z \ncong Z[1]$ *then*

$$\langle W, \hat{Z} \rangle = \begin{cases} 1 & \text{if } W \cong Z \text{ or } Z[-1] \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

If $Z \cong Z[1]$ *then*

$$\langle W, \hat{Z} \rangle = \begin{cases} 2 & \text{if } W \cong Z \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Distinguishing objects by dimensions of homomorphisms

The following is similar to a result of Jensen-Su-Zimmermann with different hypotheses.

Corollary

Let W be an indecomposable object of $\mathcal{C}$. The values of $\dim \mathrm{Hom}(W, Z)$ *as Z ranges over indecomposable objects determine the shift orbit to which W belongs. If the shift orbit containing W is either infinite or of odd length, then the isomorphism type of W is determined by the values of* $\dim \mathrm{Hom}(W, Z)$.

A more elaborate bilinear form

Recall $A(\mathcal{C}) := K_0(\mathcal{C}, \oplus)$. We put

$$A_{\mathbb{Q}}(\mathcal{C})^t := \mathbb{Q}(t) \otimes_{\mathbb{Z}} A(\mathcal{C}) / \langle 1 \otimes [M[i]] - t^i \otimes [M] \rangle.$$

Thus t acts on $[M]$ as the shift.
Suppose that for every pair of objects M and N in $\mathcal{C}$, $\mathrm{Hom}(M, N[i]) \neq 0$ for only finitely many i.
We define

$$\langle\ ,\ \rangle^t : A_{\mathbb{Q}}(\mathcal{C})^t \times A_{\mathbb{Q}}(\mathcal{C})^t \to \mathbb{Q}(t)$$

on basis elements M and N by

$$\begin{aligned}\langle M, N \rangle^t :&= \sum_{i \in \mathbb{Z}} t^i \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N[i]) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} t^i \langle M, N[i] \rangle.\end{aligned}$$

The form is Hermitian

From the definition:

Proposition

1. $\langle\ ,\ \rangle^t$ *is a sesquilinear form.*
2. *When* $\mathcal{C} = D^b(\Lambda\text{-proj})$ *for a symmetric algebra* Λ *the form is Hermitian.*
3. *When* $\mathcal{C} = D^b(kG\text{-proj})$ *for a group algebra* kG *we have*

$$\langle M \otimes_k U, N\rangle^t = \langle M, U^* \otimes_k N\rangle^t$$

and

$$\langle M, N\rangle^t = \langle M^*, N^*\rangle^t.$$

Dual elements in the Green ring of perfect complexes

Theorem

Whenever $X \to Y \to Z \to X[1]$ is an Auslander-Reiten triangle in $\mathcal{C}$ and $\hat{Z} = X + Z - Y$ in $A_{\mathbb{Q}}(\mathcal{C})^t$ we have

$$\langle M, \hat{Z} \rangle^t = \begin{cases} 0 & \text{unless } M \cong Z[i] \text{ for some } i, \\ (1+t) & \text{if } M \cong Z, \end{cases}$$

so that the element $\frac{1}{1+t}\hat{Z}$ is dual on the right to Z. Similarly $\frac{1}{1+t^{-1}}\hat{Z}$ is dual on the left to X.

que pour tout i, j'aie $n(W_i)=\{i\}$ et les matrices triangulaires supérieures ayant des "1" sur la diagonale: si f_i est la forme linéaire associée à W_i, je construit la matrice T définie par $T_i^j=f_i(e^j)$.

Je peux ainsi indexer la base $(e^{\underline{S}}_{\underline{n}})$ sous la forme (e^T), où T parcourt les matrices triangulaires supérieures ayant des "1" sur la diagonale.

Qu'est-ce que "un" ?

■ Poincaré, devant ce qu'on pourrait appeler la montée des formalismes, manifestait un certain scepticisme. Dans *Science et méthode*, il se livre à des commentaires ironiques tels que celui-ci :

« Nous voyons M. Burali-Forti définir le nombre 1 de la manière suivante :

$$1 = \iota T' \{ Ko \frown (u, h) \varepsilon (u \varepsilon Un) \},$$

définition éminemment propre à donner une idée du nombre 1 aux personnes qui n'en auraient jamais entendu parler. J'entends trop mal le Péanien pour oser risquer une critique, mais je crains bien que cette définition ne contienne une pétition de principe, attendu que j'aperçois 1 en chiffre dans le premier membre et Un en toutes lettres dans le second. »

Couturat, lui, définit 1 sans recourir au mot « un ». Mais en recourant au mot « deux »... « J'ai peur, déclare Poincaré, que si on demandait à M. Couturat ce que c'est que « deux », il ne soit obligé de se servir du mot « un ». »

(La Recherche. n°74. Jan. 77)

Soit alors f un automorphisme de P représenté dans la base (e^i) par la matrice M. L'action de f sur $H_{n-2}(s°(P))$ est alors représentée dans la base (e^T) par la matrice F telle que:

$$F(e^T) = \sum_S F_S^T e^S$$

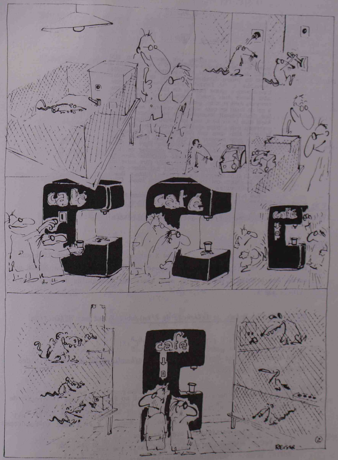
Alors le coefficient F_S^T est non-nul si et seulement si la matrice SMT^{-1} peut être ramenée à une matrice triangulaire inférieure par permutation de ses colonnes, autrement dit s'il existe une matrice de permutation X telle que $MST^{-1}X$ soit triangulaire inférieure, et dans ce cas, F_S^T est égal à la signature de X (qui est unique car la seule matrice de permutation qui soit aussi triangulaire inférieure est l'identité).

Je peux exprimer ce résultat en termes plus algorithmiques: si B est une matrice inversible, indexée par $\{0,..,n-1\}$, je définis $\sigma(B)$ comme l'application de $\{0,..,n-1\}$dans lui-même qui à l'indice i associe l'indice de ligne du premier coefficient non-nul de la i-ème colonne de B à partir du haut, soit $\sigma(B)(i)=\mathrm{Inf}\{j/\ B_j^i\neq 0\}$. Alors:

$$F_S^T = \varepsilon_{\sigma(SMT^{-1})}$$

où je prolonge la signature par 0 sur les applications non-bijectives.

Ceci achève la première partie...



Dessins de Reiser extraits de « La vie des bêtes ». Editions du square

Another consequence

Theorem

Let Λ be a self-injective algebra of radical length at least 3. There exist indecomposable perfect complexes with degree zero homology of arbitrarily large dimension.

Wheeler showed that in this situation the Auslander-Reiten quiver components are of type $\mathbb{Z}A_\infty$. We exploit this shape and the basic lemma.

A finiteness theorem

Theorem (Diveris-Purin-Webb)

Let $\mathcal{C}$ be connected, and let Γ be a stable component of the Auslander-Reiten quiver of $\mathcal{C}$ that has Dynkin tree class. Then Γ contains every indecomposable object of $\mathcal{C}$.

Corollary (Diveris-Purin-Webb)

Let $\mathcal{C}$ be a connected triangulated category with a finite stable component Γ of its Auslander-Reiten quiver. Then the tree class of Γ is a Dynkin diagram and Γ contains every indecomposable object of $\mathcal{C}$.

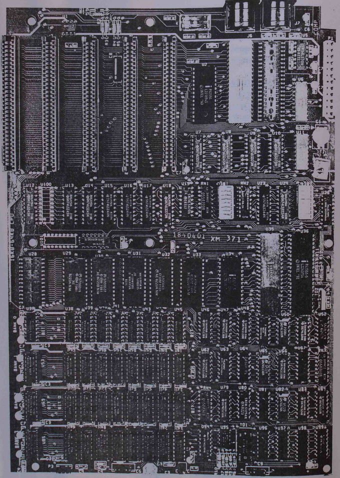
Extended Dynkin theorem and conjecture

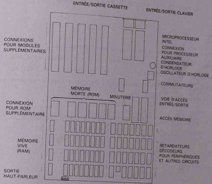
Theorem (Diveris-Purin-Webb)

Let $\mathcal{C}$ have stable Auslander-Reiten quiver components Γ_1 and Γ_2. Suppose there are objects $X \in \Gamma_1$ and $Y \in \Gamma_2$ so that either $\mathrm{Hom}(X, Y) \neq 0$ or $\mathrm{Hom}(Y, X) \neq 0$. If Γ_1 has an extended Dynkin diagram as its tree class then the tree class of Γ_2 is either an extended Dynkin diagram or one of the trees A_∞, B_∞, C_∞, D_∞ or A_∞^∞.

Conjecture (Diveris-Purin-Webb)

Suppose that Γ_1 and Γ_2 have $\mathrm{Hom}(X, Y) \neq 0$ for some $X \in \Gamma_1$ and $Y \in \Gamma_2$. If the tree class of Γ_1 is a (finite) extended Dynkin diagram then the tree class of Γ_2 is either the same diagram or A_∞.





1. LE CIRCUIT PRINCIPAL de l'ordinateur individuel IBM est représenté sur la photographie ci-contre et ses éléments essentiels sont représentés sur le schéma ci-dessus. Les dimensions de la plaquette sont 21 centimètres sur 30. Sur cette plaquette sont fixées de nombreuses pastilles de silicium portant chacune des circuits intégrés ; chaque pastille mesure un demi-centimètre de côté et est enchâssée dans un boîtier de plastique rectangulaire pourvu d'électrodes. Les pastilles ainsi que les éléments comme les résistances et les condensateurs sont interconnectés par des circuits imprimés sur la plaquette. Le microprocesseur, le *8088* de 16 bits fabriqué par la Société *Intel*, possède 20 000 transistors et fonctionne à une fréquence de presque cinq millions de hertz. Les programmes de base du système sont stockés en permanence dans la mémoire morte (ROM) tandis que les programmes et les données susceptibles d'être modifiés sont stockés dans la mémoire vive ou mémoire à accès sélectif (RAM).

Pour la Science. Février 1983

La photographie précédente indique aussi la provenance des circuits intégrés utilisés; EL SALVADOR, PHILIPPINES, MALAISIE.

A propos, cette rédaction a été faite sur une machine IBM: Qui, de IBM ou de moi, travaille pour l'autre ?

Almost vanishing morphisms

We call the third morphism γ in an Auslander-Reiten triangle

$$X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \xrightarrow{\gamma} \Sigma X$$

almost vanishing. It determines the corresponding Auslander-Reiten triangle by completing it to a triangle and rotating.

Existence of almost vanishing morphisms is equivalent to existence of Auslander-Reiten triangles.

Almost vanishing morphisms have been used by Carlson-Chebolu-Mináč to construct ghost maps showing that Freyd's generating hypothesis fails in general for the stable module category $\mathbf{stmod}(kG)$.

They were also used by Linckelmann and Stancu to construct elements of the graded center.

Linckelmann-Stancu elements of the graded center

For **stmod**(A) when A is a symmetric algebra Linckelmann constructed, for each non-projective indecomposable module U, a natural transformation $\zeta : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to \Omega = \Sigma^{-1}$ such that $\zeta_U : U \to \Omega(U)$ is almost vanishing and $\zeta(V) = 0$ when V is indecomposable, not isomorphic to $\Omega^n(U)$ for any integer n. Linckelmann and Stancu then produced many nilpotent elements of the graded center in degree 0.

Write Σ for the shift and assume $\mathcal{C}$ has Auslander-Reiten triangles. It is equivalent to suppose $\mathcal{C}$ has a Serre functor $\mathcal{S} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, meaning $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, \mathcal{S}X)^*$ always.

Restrictions on the graded center

The natural transformations of the kind constructed by Linckelmann are the only ones with small support.

Theorem (Carlson-Webb)

Let $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ be a k-linear endofunctor and suppose $\alpha : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to F$ is a natural transformation. With some conditions, if α has support contained in $\{\Sigma^r M \mid r \in \mathbb{Z}\}$ then $F(M) = \mathcal{S}(M)$, and α is one of the natural transformations constructed by Linckelmann.

Theorem (Carlson-Webb)

Let $\mathcal{C} = \mathbf{stmod}(kG)$ where kG has wild representation type. If $\alpha : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to \Sigma^r$ lies in the graded center and has support on only finitely many shift orbits then it is a sum of the natural transformations constructed by Linckelmann.

Characterization of almost vanishing morphisms

Proposition

Assume there is a Serre functor. Let $f : X \to Y$ be a morphism between indecomposable objects in $\mathcal{C}$. Equivalent:

1. *f is almost vanishing.*
2. *f is non-zero, and for all objects U, f factors through every non-zero morphism $U \to Y$.*
3. *dual of 2.*
4. *Whenever $g : U \to X$ is not a split epimorphism in $\mathcal{C}$ then $fg = 0$.*
5. *dual of 4.*
6. *The map $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, f) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Y)$ factors through a simple functor.*

Thus morphisms f satisfying any (and hence all) of the above conditions are determined up to scalar multiple. For such a morphism, $Y \cong \mathcal{S}(X)$.

References

- P.J. Webb, *Consequences of the existence of Auslander-Reiten triangles with applications to perfect complexes for self-injective algebras,* preprint.
- K. Diveris, M. Purin and P.J. Webb, *Combinatorial restrictions on the tree class of the Auslander-Reiten quiver of a triangulated category,* preprint.
- J.F. Carlson and P.J. Webb, *The graded center of a triangulated category,* preprint.

HAPPY BIRTHDAY SERGE!